

Цвет в компьютерной графике

Понятия света и цвета в компьютерной графике являются основополагающими. На практике мы редко сталкиваемся со светом какой-то одной определенной длины волны (исключение составляет лишь излучение лазера). Обычно свет представляет собой непрерывный поток волн с различными длинами волн и различными амплитудами. Такой свет можно характеризовать так называемой энергетической (мощностной) спектральной кривой (рис. 1), где само значение функции представляет собой вклад волн с длиной волны λ в общий волновой поток.

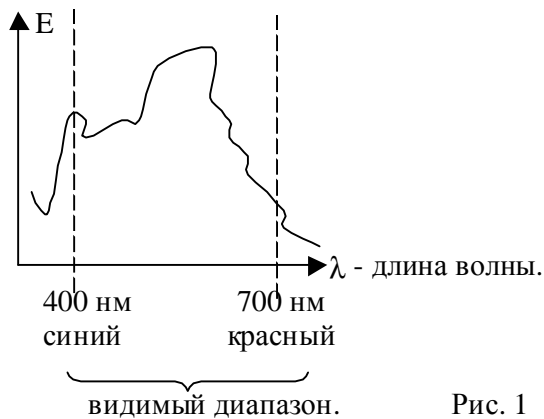


Рис. 1

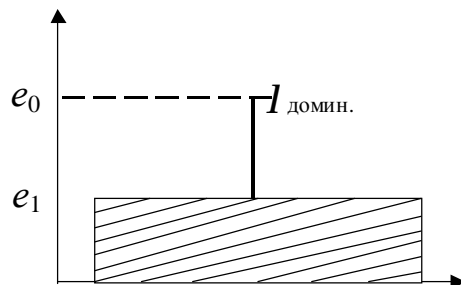
Само понятие цвета тесно связано с тем, как человек (человеческий взгляд) воспринимает свет; можно сказать, что цвет зарождается в глазу.

Субхарактеристики цвета:

Цветовой тон – ярковыраженность красного(**R**) , зелёного(**G**) или синего(**B**) – это основная цветовая характеристика.

Насыщенность – степень разбеленности, степень осветления цветового фона.

Светлота - интенсивность (мощность) цвета.

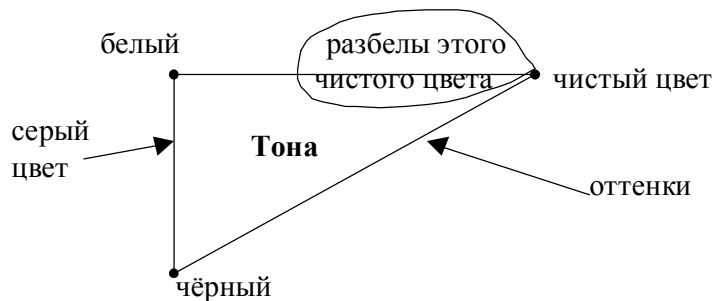


$\lambda_{\text{домин.}}$ – характеризует цветовой тон
Цвет, который может быть заменен $\lambda_{\text{домин.}}$ называется спектральным.

$$\eta = \frac{e_1 - e_0}{e_1} - \text{насыщенность}$$

$$I = \int_{400}^{700} E(\lambda) \cdot P(\lambda) d\lambda$$

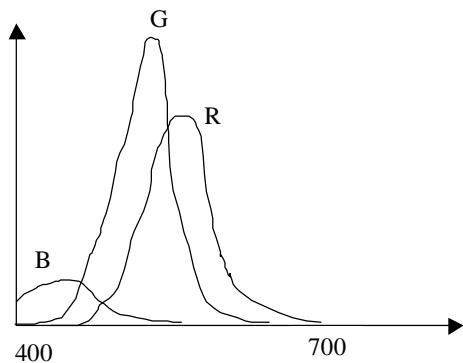
Ахроматическое изображение – это черно-белое изображение.



Внутри треугольника расположены тона.

Сетчатка глаза содержит два принципиально различных типа фоторецепторов – палочки, обладающие широкой спектральной кривой чувствительности, вследствие чего они не различают длин волн и, следовательно, цвета, и колбочки, характеризующиеся узкими спектральными кривыми и поэтому обладающие цветовой чувствительностью.

Колбочки бывают трех типов, отвечающих за чувствительность к длинным, средним и коротким волнам. Выдаваемое колбочкой значение является результатом интегрирования спектральной функции с весовой функцией чувствительности.

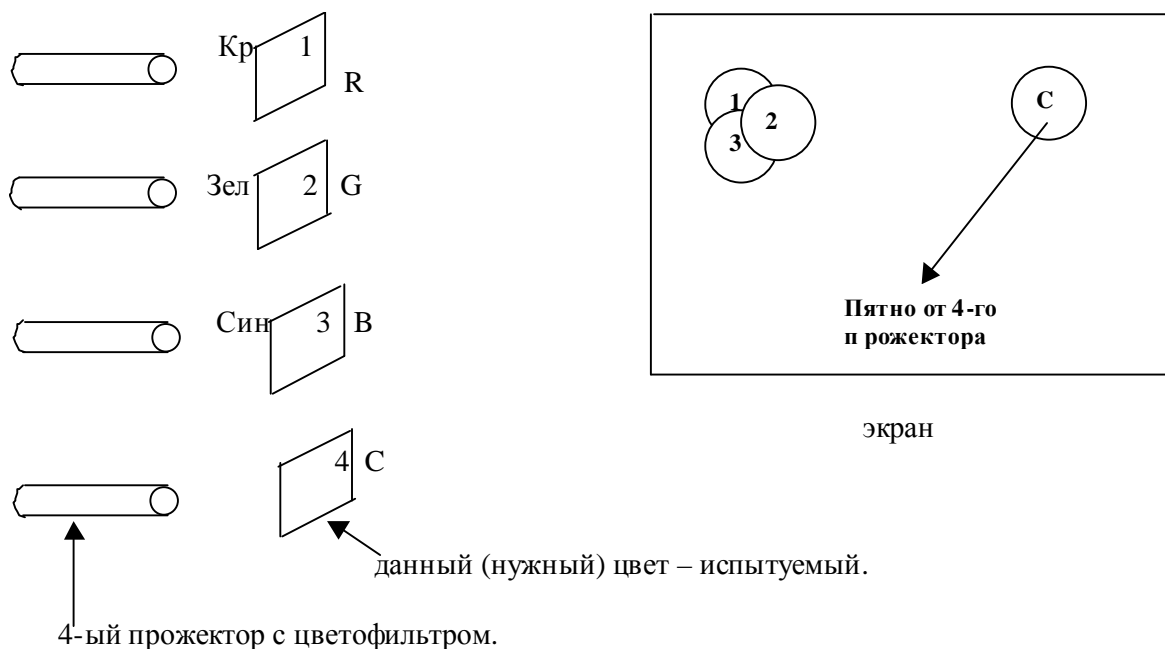


На рисунке представлены графики функций чувствительности для всех трех типов колбочек. Видно, что у одной из них пик чувствительности приходится на волны с короткой длиной волны (синий цвет), у другой – на волны средней длины волны (желто-зеленый цвет), а у третьей – на волны с большой длиной волны (красный цвет).

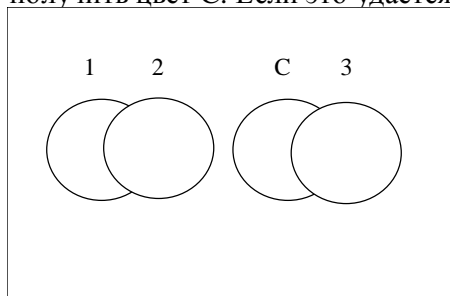
Существует трёхкомпонентная гипотеза : любой цвет (оттенок) можно получить из 3-х компонентов R,G,B.

Схема уравнивания цветов.

Есть 3 прожектора. Перед ними выставляются цветофильтры, пропускающие волны определённой длины.



Суть в том, что первые 3 прожектора имеют феостаты для регулировки цвета. С их помощью добиваются, чтобы цвет пересечения первых 3 пятен стал эквивалентен цвету С. Изменяя интенсивности прожекторов R, G, B, пытаются получить цвет С. Если это удастся, то цвет С разложили по R, G, B.



Интенсивность по каналу 3 отрицательная.

$$I_c = I_1 + I_2 - I_3$$

Аксиомы смещения цветов Грассмана.

Аксиома 1:

Любой цвет может быть уравнен смесью не менее, чем трех любых цветов. Коэффициенты могут быть и положительными и отрицательными.

Аксиома 2:

Уравнивание, достигнутое при данных интенсивностях цвета, сохраняется в широком диапазоне интенсивностей.

Аксиома 3:

Смесь цветов не может быть разделена человеческим глазом на отдельные компоненты.

Аксиома 4:

Яркость (светлота) смеси цветов равна сумме яркости её компонентов.

Аксиома 5: Закон сложения цветов.

Если цвет **M** эквивалентен цвету **N**, а цвет **P** эквивалентен **Q**, то смесь цветов **M+P** эквивалентна смеси **N+Q**.

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}; \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q};$$

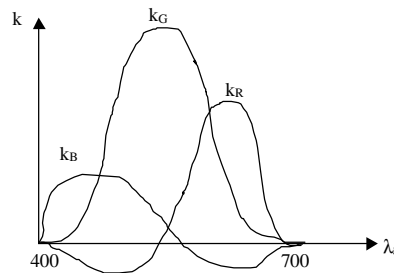
$$\mathbf{M} + \mathbf{P} = \mathbf{N} + \mathbf{Q};$$

Аксиома 6: Закон вычитания цветов.

Если $\mathbf{M} + \mathbf{P} = \mathbf{N} + \mathbf{Q}$ и известно, что $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$, то $\mathbf{M} = \mathbf{N}$ (обратное пункту 5)

Аксиома 7: Закон транзитивности.

Если $\mathbf{M} = \mathbf{N}$; $\mathbf{N} = \mathbf{P}$, то $\mathbf{M} = \mathbf{P}$.



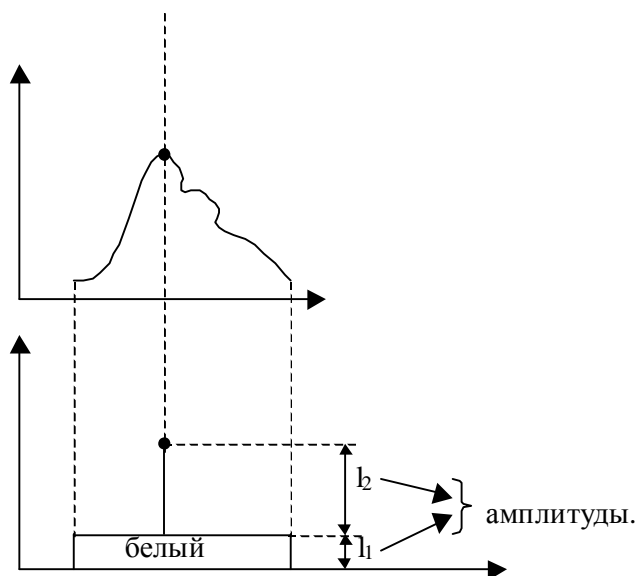
Аксиома 8:

Аксиома представляет собой рассуждения об уравнивании цветов:

- со всеми положительными коэффициентами;
- с одним отрицательным коэффициентом;
- с двумя отрицательными коэффициентами.

Остальные в телевизоре не видны.

Выводы: цветовое ощущение может быть получено при замене спектрального излучения на одну λ доминирующую и некоторую долю белого цвета.

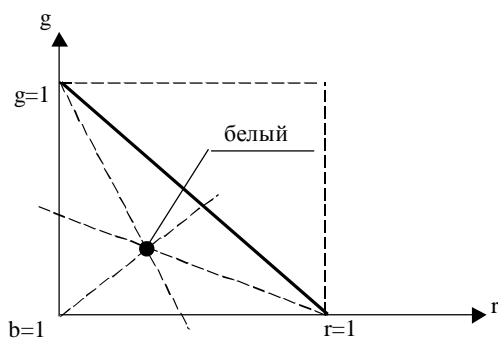


$$r = \frac{R}{R + G + B}$$

$$r + g + b = 1$$

$$g = \frac{G}{R + G + B}$$

$$b = \frac{B}{R + G + B}$$



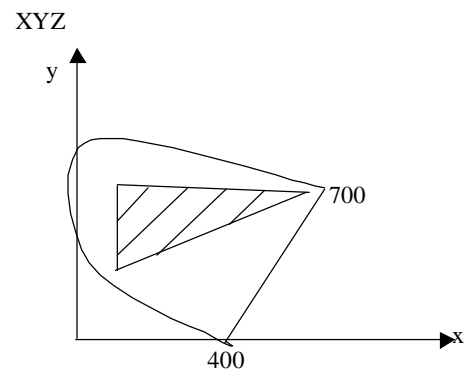
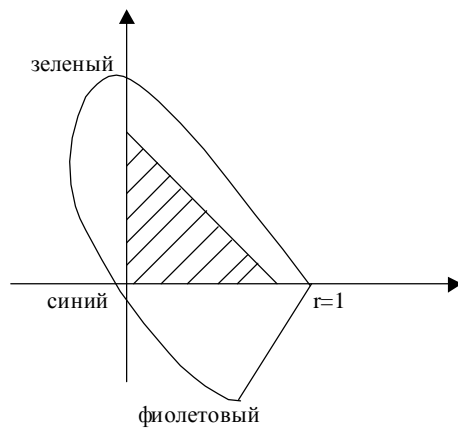
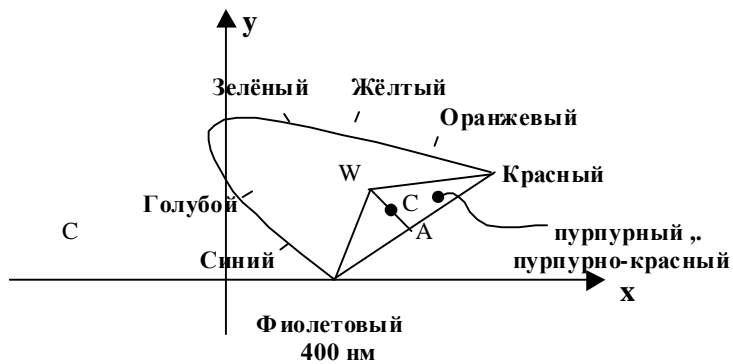
Цвета различной интенсивности, но одного тона будут соответствовать одной точки (на пересечении меридиан).

Яркость (интенсивность)

Для красного цвета $\lambda_d = 700$ мм.

Для зелёного цвета $\lambda_d = 546,1$ мм.

Для синего цвета $\lambda_d = 435,8$ мм.

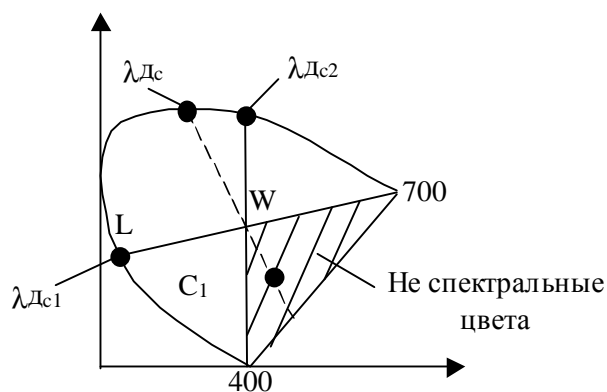


$$X=0.4184 \cdot R - 0.0912 \cdot G + 0.009 \cdot B$$

$$Y=-0.1587 \cdot R + 0.2524 \cdot G - 0.0025 \cdot B$$

$$Z=-0.0828 \cdot R + 0.0157 \cdot G + 0.1786 \cdot B$$

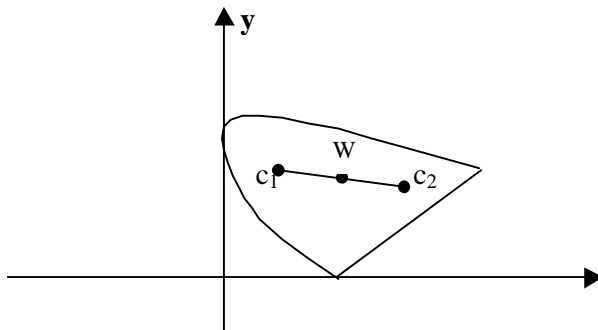
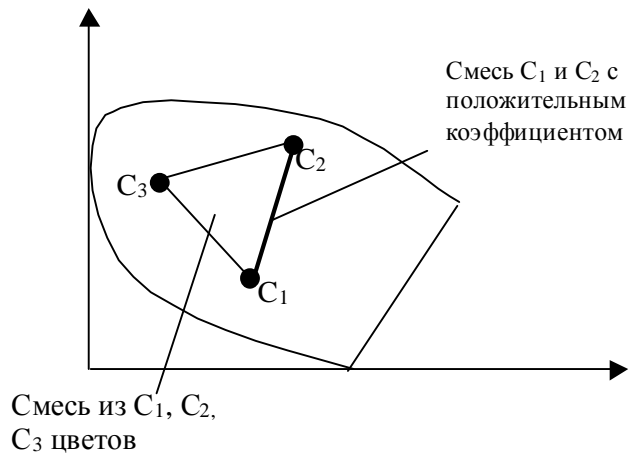
Y – яркостная компонента цветового восприятия.



$\lambda_{Дс}$ - $\lambda_{Д}$ дополнительная для не спектральных цветов.

$$h = \frac{CW}{LW}$$

Дополнительный цвет – цвет, при смешивании которого с данным цветом получаем белый цвет.



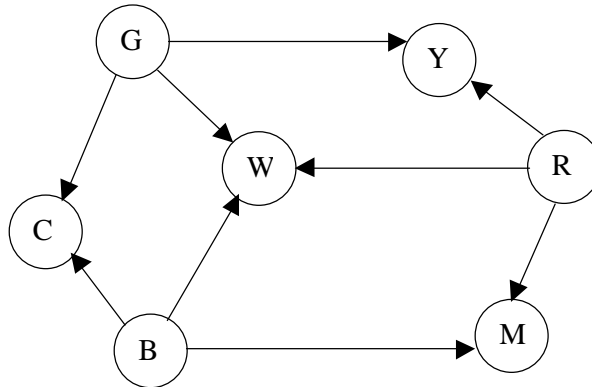
$$W = c_1 \cdot \frac{c_2 \cdot W}{c_2 \cdot c_1} + c_2 + \frac{c_1 \cdot W}{c_2 \cdot c_1} \quad \text{- формула для смешанного цвета.}$$

Стоит отметить, что человек может различить 350 тысяч цветов. (точнее даже цветовых оттенков) - $2^{18} - 2^{19}$.

Кроме этого человек различает 128 тонов. По насыщенности человек различает от 16 (жёлтый цвет) до 23 оттенков (красный, фиолетовый.).

По интенсивности - $\frac{350000}{20 \cdot 128} = 140$

Сложение цветов



М – пурпурный ; **Y** – жёлтый ; **С** – голубой.

Свойства голубого , жёлтого и пурпурного цвета.

Как видно из приведённой выше картинке , иллюстрирующей сложение цветов, пурпурный цвет (**М**) **пропускает** красный (**R**) и синий (**B**).

жёлтый цвет (**Y**) пропускает зелёный (**G**) и **красный** (**R**)

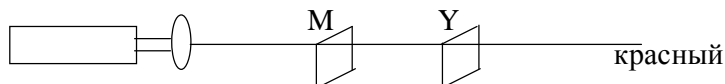
голубой цвет (**С**) пропускает зелёный (**G**) и **синий** (**B**).

Не трудно заметить , что пурпурный цвет (**М**) и жёлтый цвет (**Y**) пропускают **красный** цвет (**R**).

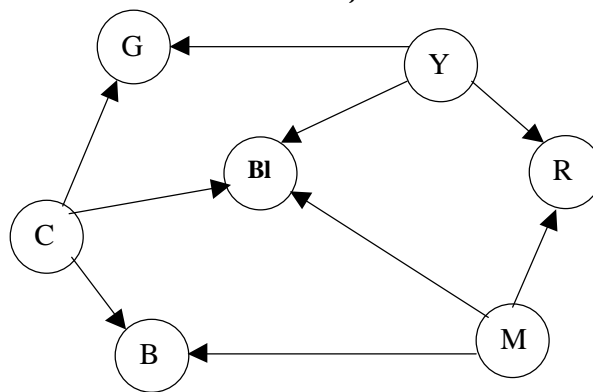
Пурпурный цвет (**М**) и голубой цвет (**С**) пропускают **синий** цвет (**B**).

Голубой цвет (**С**) и жёлтый цвет (**Y**) пропускают **зелёный** цвет (**G**).

Исходя из выше сказанного, можно сделать вывод, что если перед прожектором выставить два цветофильтра (например, пурпурный и жёлтый), то на выходе будет красный цвет.



Вычитание цветов



Bl – это чёрный (Blake)

Здесь не **RGB** система , а **CMY**.

$$\begin{bmatrix} C \\ M \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

Интенсивность (R , G , B) меняется в диапазоне от 0 до 1.

Система координат YIQ

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,59 & 0,11 \\ 0,6 & -0,28 & -0,32 \\ 0,21 & -0,52 & 0,31 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

Y – это компонента яркости – сигнал, передаваемый и воспринимаемый на чёрно-белом телевизоре.

I, Q – позволяют найти RGB.

YJP система при кодировании JPEG

R , G , B = 0..... M :

Y , J , P = 0.....M.

Человеческий глаз более чувствительный к оттенкам яркости и менее чувствителен к оттенкам цвета.

$$\begin{cases} Y = 0,299R + 0,657G + 0,114B \\ J = -0,1687R - 0,3313G + 0,5B + 0,5M \\ P = 0,5R - 0,4187G - 0,0813B + 0,5M \end{cases}$$

Y в обоих случаях кодируется с максимальной точностью.

J, P можно поджать по разрядности.

Если Y считается для каждого пикселя, то J, P можно считать для каждого 4-го пикселя.

Если изображение – N * N пикселей и 24 (3*8) разряда на пиксель.

$$I_0 = 24N^2 \quad \text{RGB} \rightarrow \text{YJP}$$

Y – 8 разрядов

J, P – 6 разрядов на каждый

$$I = \underbrace{8N^2}_Y + \frac{N^2}{4} \cdot G \cdot 6 \cdot 2 = 11N^2$$

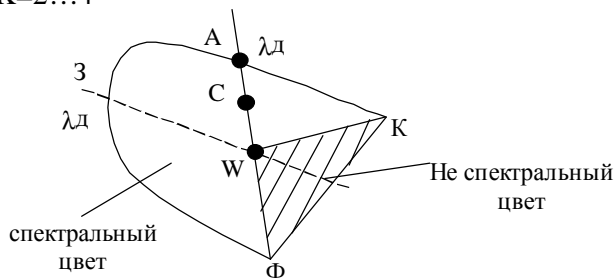
для Y

$$K = \frac{24N^2}{11N^2} = 2,2 \text{ - сжатие.}$$

$$\Delta \bar{z} = N^2 \sqrt{\Delta R^2 + \Delta G^2 + \Delta B^2}$$

$$\Delta \bar{z} = N^2 \sqrt{\Delta Y^2 + \frac{\Delta J^2 + \Delta P^2}{K}}$$

K=2...4



$$h = \frac{CW}{AW}$$

из R, G, B переходим в r, g, b

$$r = \frac{R}{R + G + B}$$

$$g = \frac{G}{R + G + B}$$

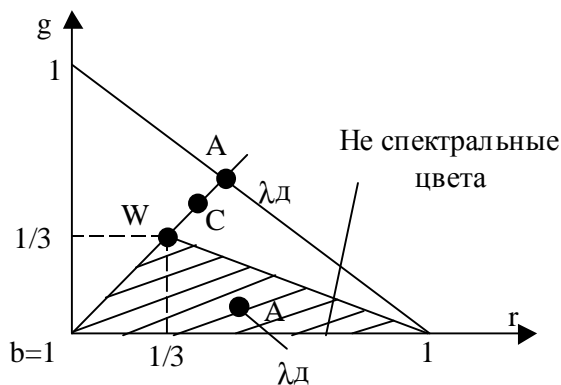
$$b = \frac{B}{R + G + B}$$

$$r + g + b = 1$$

A – цветовой тон

$$h = \frac{CW}{AW}$$

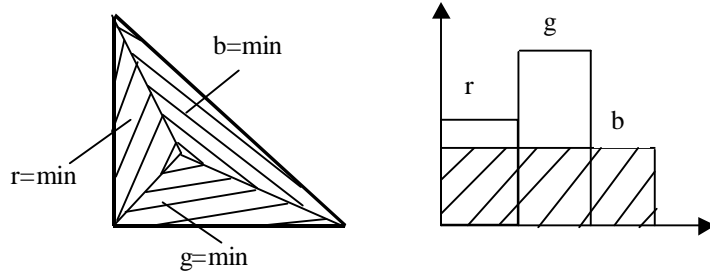
Все свойства цветового



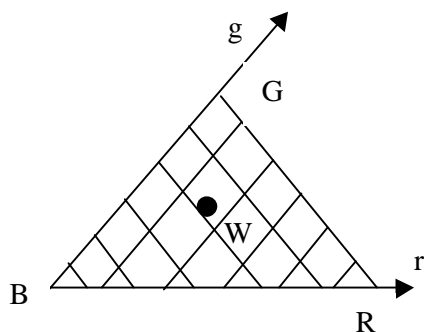
графика сохраняются.

$$h = 1 - 3 \cdot \min(r, g, b)$$

Коэффициент насыщенности



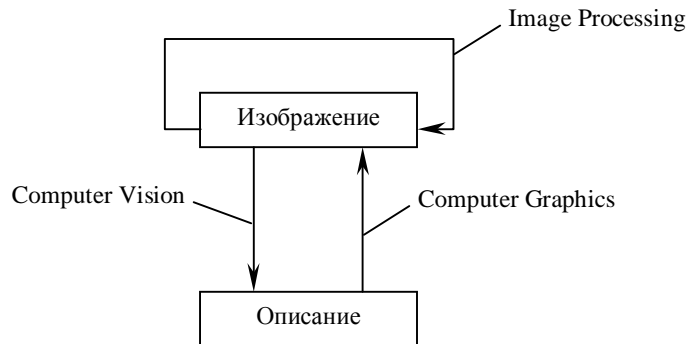
Для получения насыщенного цвета нельзя брать смесь из трех цветов, так как появляется белая компонента.



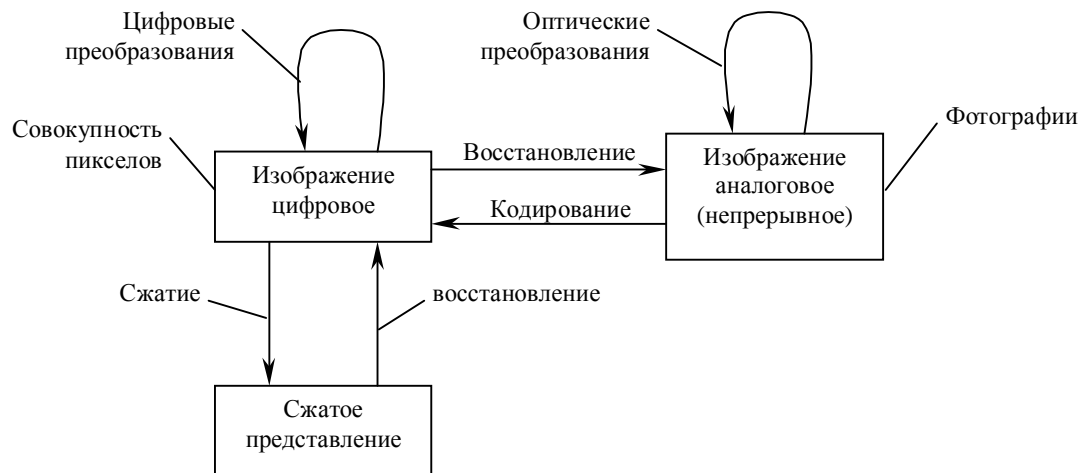
Цветовой треугольник Паскаля.

Обработка изображений

Обработка изображений – это деятельность над изображениями



При обработке изображений существуют следующие группы задач



Мы ограничимся работой только с цифровым изображением.

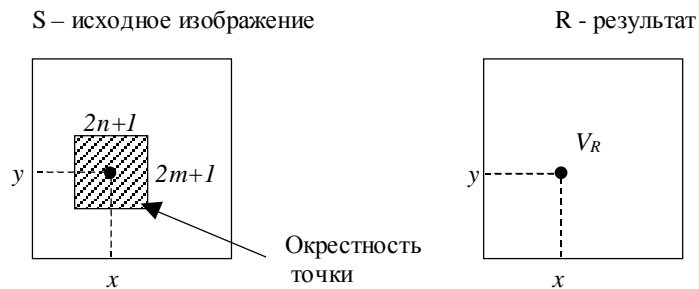
Цифровые преобразования по цели преобразования можно разделить на два типа:

- **Реставрация изображения** – компенсирование имеющегося искажения (например, плохие условия фотосъемки)
- **Улучшение изображения** – это искажение изображения с целью улучшения визуального восприятия или для преобразования в форму, удобную для дальнейшей обработки.

Цифровые преобразования по методам преобразования можно разделить на три типа:

- **Амплитудные преобразования (АП)**
- **Геометрические преобразования (ГП)**
- **Комбинированные преобразования (КП)**

Амплитудные преобразования



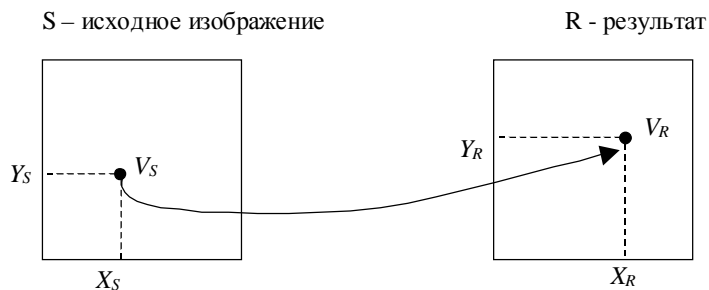
Координаты точек не меняются.

$V_R(x, y)$ – зависит от совокупности точек вокруг точки V_S (в окрестности)

Формула амплитудного преобразования:

$$V_R(x, y) = f(\{V_S(x+i, y+j), i \in [-n \dots n], j \in [-m \dots m]\}, x, y)$$

Геометрические преобразования



$V_R = V_S$, здесь изменяется местоположение точки без искажения амплитуды.

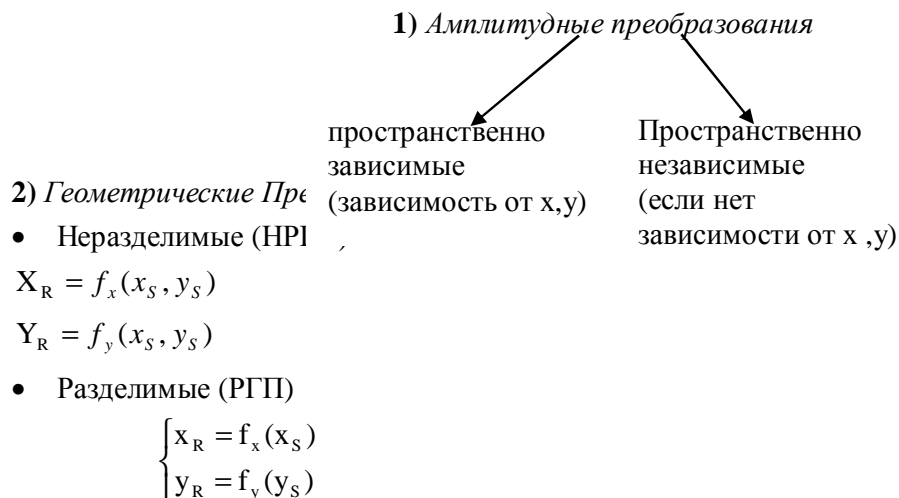
$$X_R = f_x(x_S, y_S, V_S)$$

$$Y_R = f_y(x_S, y_S, V_S)$$

Комбинированные преобразования

Если преобразование очень сложное и не входит ни в амплитудные преобразования, ни в геометрические преобразования, то оно называется комбинированным преобразованием. Совместно задействованы амплитудные и геометрические преобразования.

Частные случаи геометрических преобразований



Как правило все ГП – неразделимые и лишь в редких случаях говорят о разделимых ГП.

3) Проективные преобразования

описываются следующим образом:

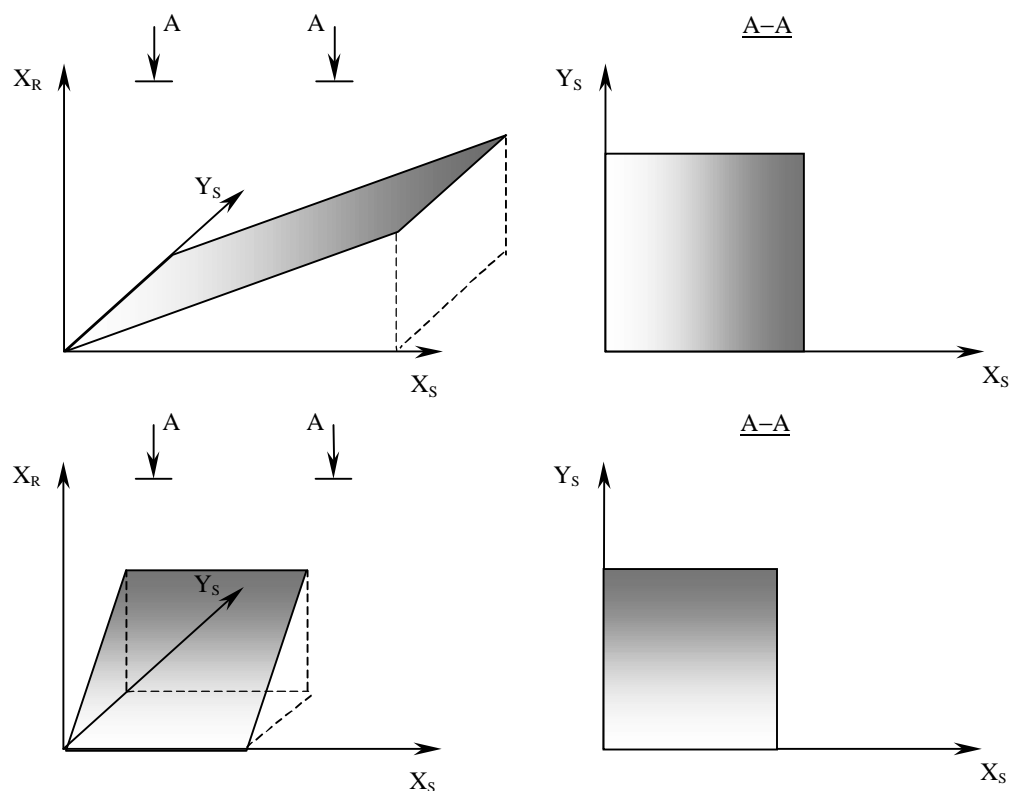
$$X_R = \frac{a_1 x_S + b_1 y_S + c_1}{a_3 x_S + b_3 y_S + c_3}$$

$$Y_R = \frac{a_2 x_S + b_2 y_S + c_2}{a_3 x_S + b_3 y_S + c_3}$$

Функции преобразования могут быть представлены в виде:

$$X_R = f(x_S, y_S)$$

X_R – можно сопоставить с яркостью.



Аффинные изображения будут отражаться на световых клиньях.

В данном случае вы можете наблюдать горизонтальные световые клинья (яркость в пределах столбца является постоянной, а от столбца к столбцу она меняется.)

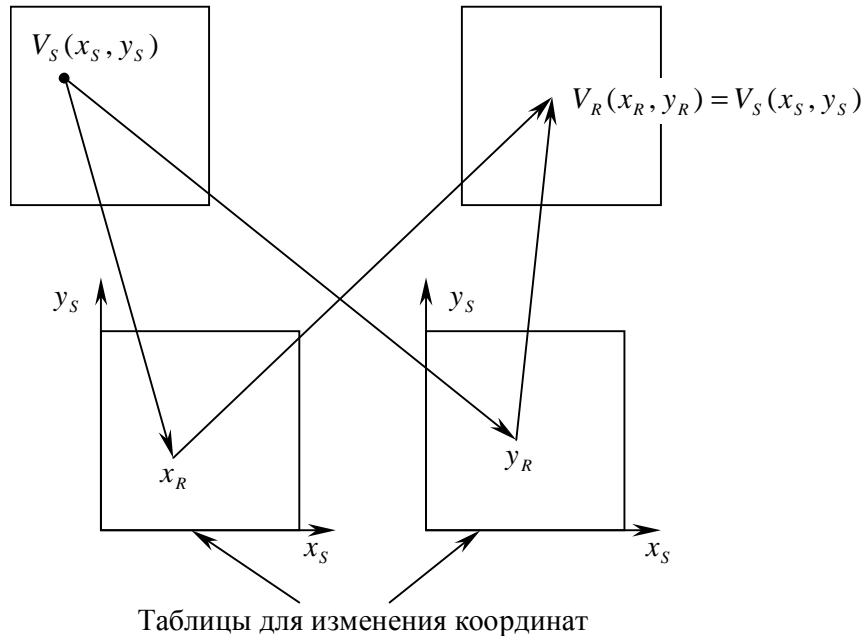
Алгоритм ГП.

При осуществлении геометрических преобразований существует две схемы пересчета:

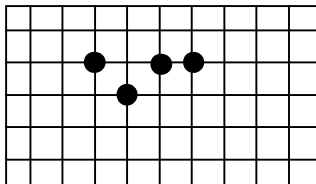
1. Схема прямого пересчета

S - исходное

R - результат



Недостаток: если идет **растяжение изображения**, то могут образовываться дырки, если же идет **сжатие**, то в одной точке может оказаться несколько точек.

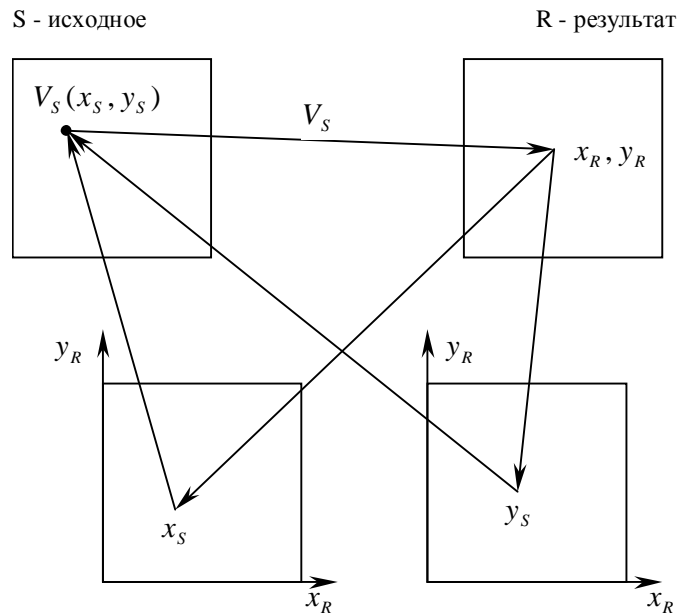


Появляются дырки. С ними можно бороться с помощью интерполяции. Поэтому схема проективного преобразования не используется

В основном используется схема обратного пересчета: перебираем точки результирующего изображения.

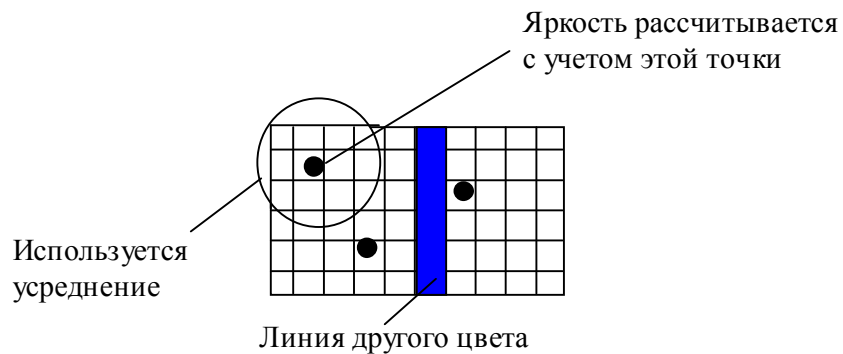
2. Схема обратного пересчета

$$\begin{cases} x_S = F_x(x_R, y_R) \\ y_S = F_y(x_R, y_R) \end{cases}$$



По результирующим координатам вычисляются текущие точки. Здесь идет перебор всех точек результирующего изображения. V_S переписывает из S в R .

Достоинство: не будет дырок как в предыдущем случае



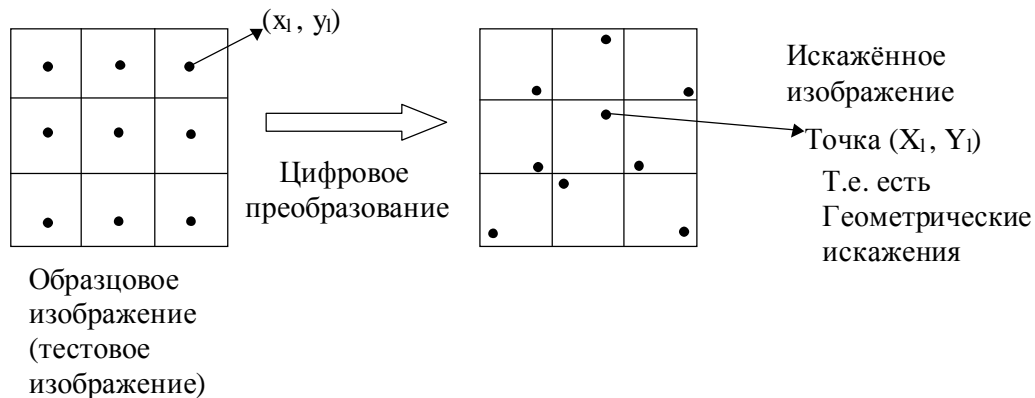
Линию другого цвета мы не видим. Чтобы ее увидеть необходимо использовать усредненное значение.

Рассмотрим задачу в плане реставрации.

Деформация изображения.

Имеется система, на вход которой подают изображение:

$l = 1 \dots L$ (пусть у нас l -текстовых точек).



Цифровое преобразование, то есть находим функции преобразования координат, которые позволяют перейти к точке с координатами (x_L, y_L) , то есть мы ищем функции (выражения записаны для схемы обратного пересчета):

$$X = F_x(x, y)$$

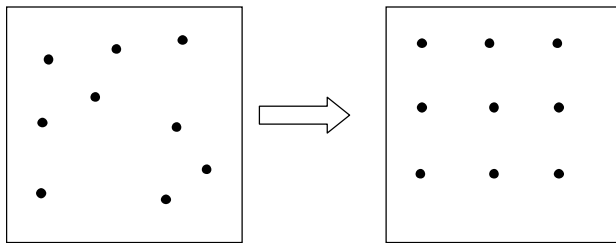
$$Y = F_y(x, y)$$



Мы постараемся найти функции, которые могут описать уход точек.

$$\begin{cases} X_l = F_x(x_l, y_l) \\ Y_l = F_y(x_l, y_l) \end{cases}$$

Мы будем работать по схеме обратного пересчёта.



Искажённое
изображение

Реставрационное
изображение

Мы перебираем точки реставрационного изображения. Решение задачи простое, если функции искать в области двумерных полиномов. Для каждой точки с координатой (x, y) мы выполняем обратный пересчёт

- для y с использованием F_y
- для x с использованием F_x

$$F_x(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n \cdot x^{i(n)} \cdot y^{j(n)}$$

$$F_y(x, y) = \sum_{n=1}^N B_n \cdot x^{i(n)} \cdot y^{j(n)}$$

$$0 \leq i(n) + j(n) \leq k$$

$$n = 1 \dots N$$

$$N = \frac{1}{2} (k+1)(k+2)$$

$$\text{При } k=2; \implies N=6$$

n	1	2	3	4	5	6
I(n)	0	1	2	0	1	0
J(n)	0	0	0	1	1	2

При данном
распределении

$$F_x(x, y) = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot x^2 + A_4 \cdot y + A_5 \cdot xy + A_6 \cdot y^2$$

Ищем коэффициенты полиномов так чтобы реставрация произошла как можно лучше. Запишем остаточное отклонение, которое мы хотим минимизировать.

$$D = \sum_{l=1}^L (X_l - F_x(X_l, Y_l))^2 + (Y_l - F_y(X_l, Y_l))^2$$

$$D = 0;$$

Будем устремлять D к **min**.

$$\{A_n, B_n\} = \text{Argmin} [D(x_l, y_l, X_l, Y_l, A_n, B_n)]$$

при условии, что: $L = 1 \dots 4$, $n = 1 \dots N$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial D}{\partial A_n} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial B_n} = 0 \end{array} \right\} \text{ это даёт } D_{\min} \text{ при } n = 1 \dots N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N A_n \sum_{l=1}^L t_{l,n} \cdot t_{l,m} = \sum_{l=1}^L X_l \cdot t_{l,m} \quad m = 1 \dots N \\ \sum_{n=1}^N B_n \sum_{l=1}^L t_{l,n} \cdot t_{l,m} = \sum_{l=1}^L Y_l \cdot t_{l,m} \quad m = 1 \dots N \end{array} \right.$$

где : $t_{l,m} = x_l^{i(m)} \cdot y_l^{j(m)}$

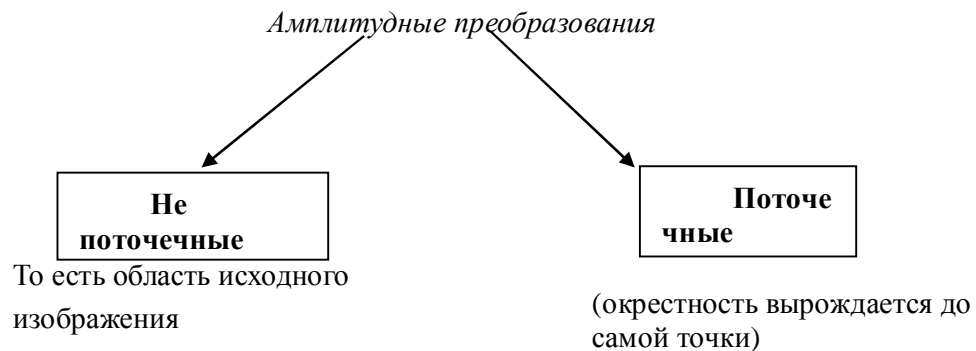
Случайная величина: $\delta = \sqrt{\frac{D}{L}}$

Если $\delta \approx 0.5 \Rightarrow$ отклонение от пиксела ± 0.5
 Степень полинома берут, начиная с 2, 3, 4, ...

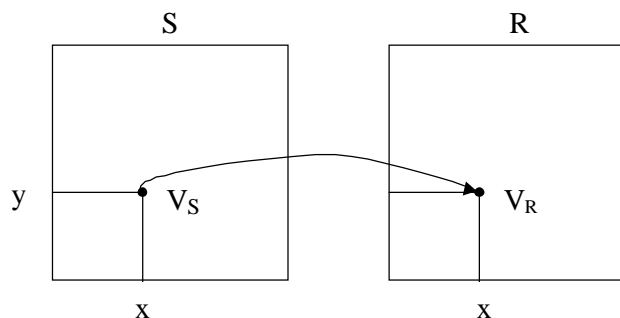
Теперь давайте поподробнее поговорим об амплитудных преобразованиях. Они связаны с изменением яркости точки.

Классификация амплитудных преобразований

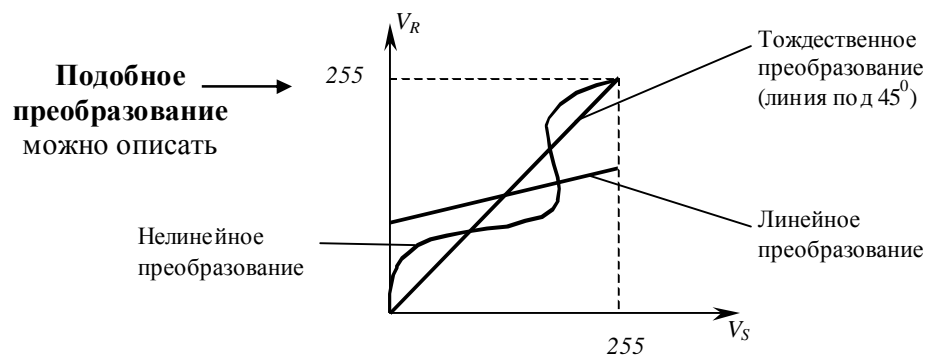
$$V_R(x,y) = f(\{V_s(x+i,y+i), i \in [-n,n], j \in [-m,m]\}, x,y)$$



Поточечные амплитудные преобразования (пространственно независимые)

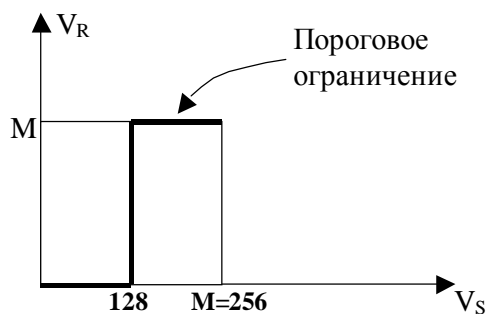


Поточечные амплитудные преобразования характеризуются функцией преобразования вектора (говорим о черно-белом изображении).

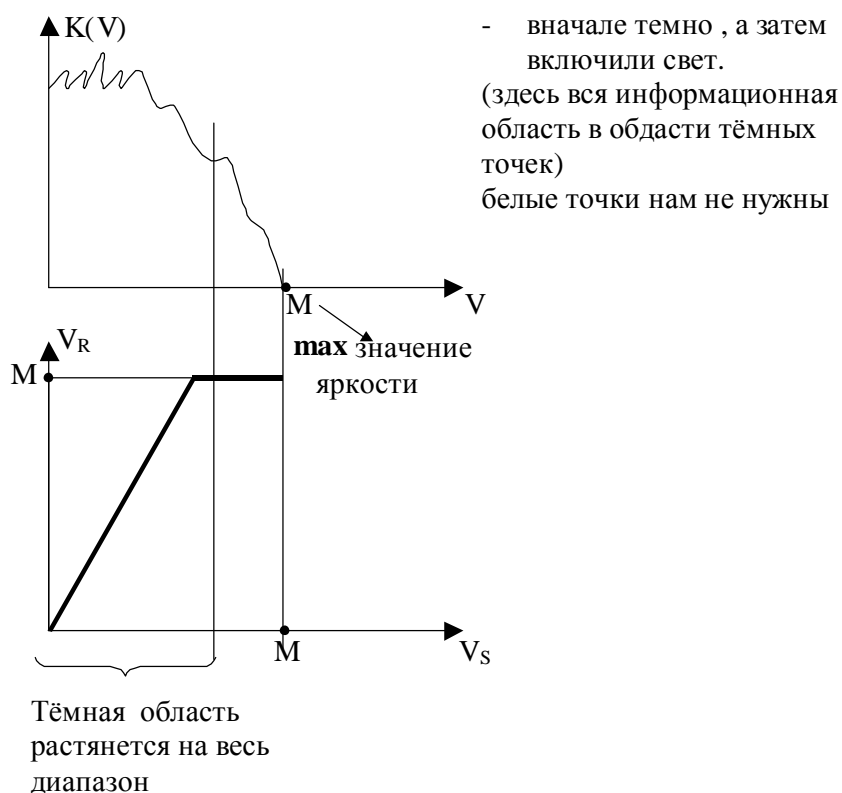


Виды зависимостей

Кусочно – линейные АП.



Сделанный снимок получился темным. Теперь посчитаем гистограмму частности кодов яркости изображения.

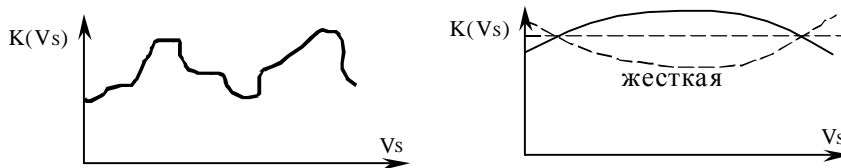


$K(V)$ – количество кодов , имеющих яркость V .

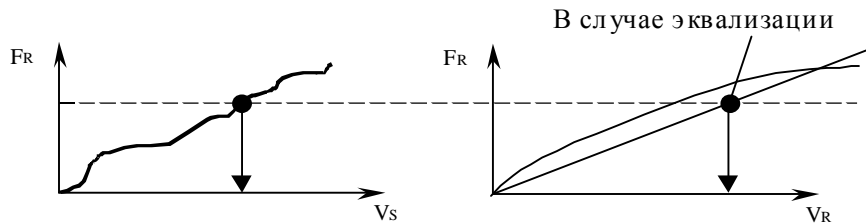
Кусочно – нелинейные АП

Результатом нелинейного преобразования является эквализация (выравнивание) гистограммы. В результате применения этого преобразования увеличивается контрастность, так как после линейных преобразований гистограмма «квадратеет» – это преобразование ее закругляет. Выход гистограммы в идеале должен быть прямой линией.

Частный случай эквализации



Необходимо найти зависимость V_R от V_S . Для этого строим следующую функцию распределения:



$$F_S(V_S) = \sum_{j=0}^{V_R} K_S(i) \text{ - формула функции распределения}$$

$F_S(V_S)$ – функция распределения кодов яркости исходного изображения.
Решая представленное ниже уравнение, мы найдём зависимость $V_R(V_S)$

$$F_R(V_R) = F_S(V_S)$$

$$F_R(V_R) = \sum_{i=0}^{V_R} K_R(i)$$

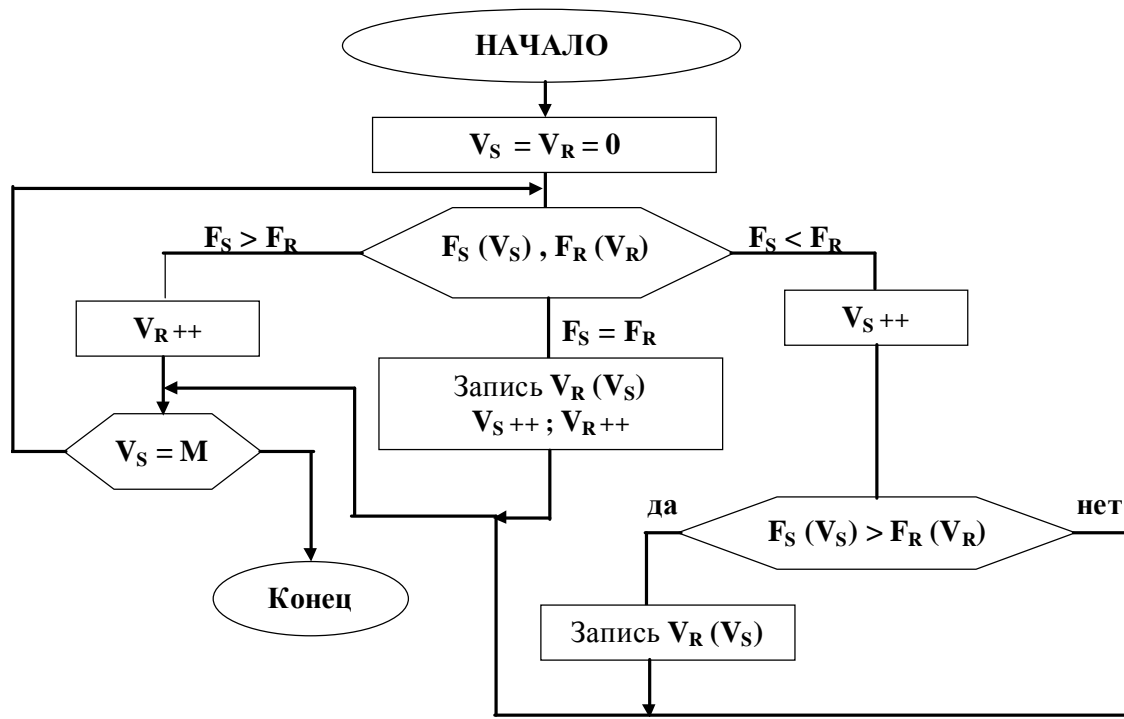
Проводя соответствующее число
линий по графику функций F_S и
 F_R (как показано выше),
находим соответствующее число
значений зависимости $V_R(V_S)$.

$$V_S = 0 \dots \dots \dots M$$

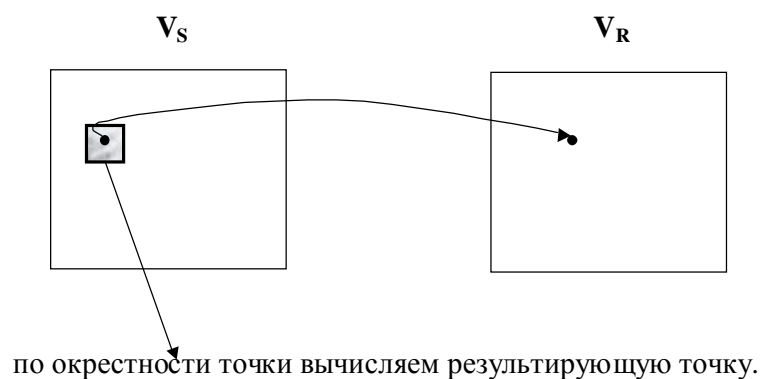
$$V_R = 0 \dots \dots \dots M$$

$$\sum_{i=0}^M K_S(i) = \sum_{j=0}^M K_R(j) = N^2 \text{ - число точек на изображении (N*N)}$$

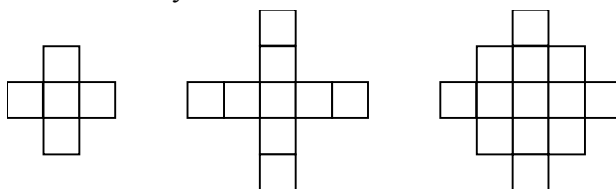
Теперь рассмотрим алгоритм решения задачи нахождения значений зависимости $V_R(V_S)$.



Пространственно независимые непоточечные амплитудные преобразования.



Бывают следующие виды окон:

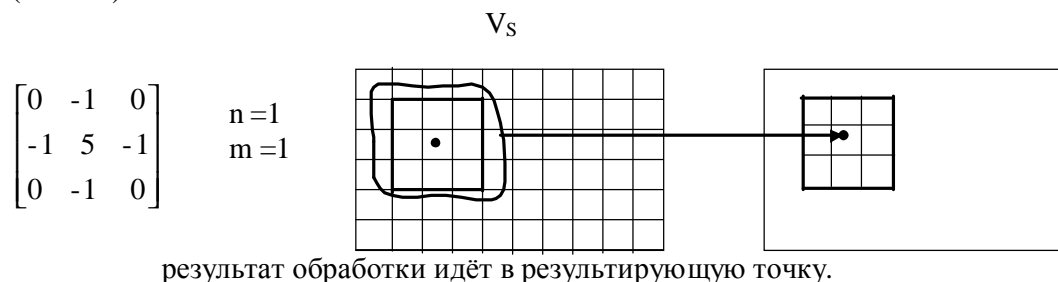


С целью повышения резкости используются маленькие окошки 3 на 3 элемента. Все эти окошки обрабатываются по принципу суммирования кодов яркости исходного изображения. На исходное изображение накладывается некоторая маска.

Основные функции оконного преобразования

1. Линейные преобразования (взвешанное суммирование). Каждый элемент имеет яркость, и результирующую яркость находим, суммируя все яркости. Например:

Маска 1
(Окно 1)



Задачу повышения четкости решаем следующим образом:

Маска 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

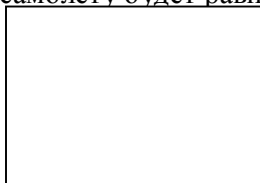
Маска 3

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Проходя несколько раз по этим окошечкам, можно получить зернистое изображение.

Пример:

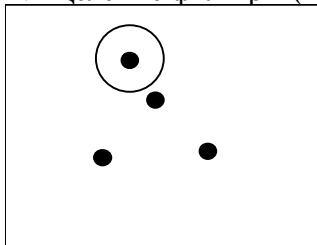
Маска (изображен самолет). Этой маске можно сопоставить коэффициенты соответствующие изображению. Все, что не относится к самолету будет равно 0.



изображение, которое
надо обработать

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

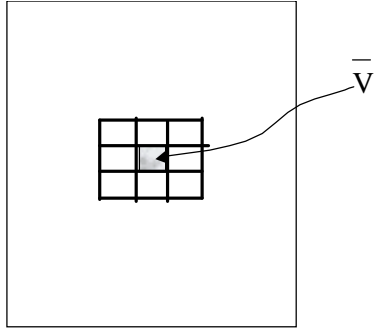
2. Целевые фильтры (импульсная фильтрация)



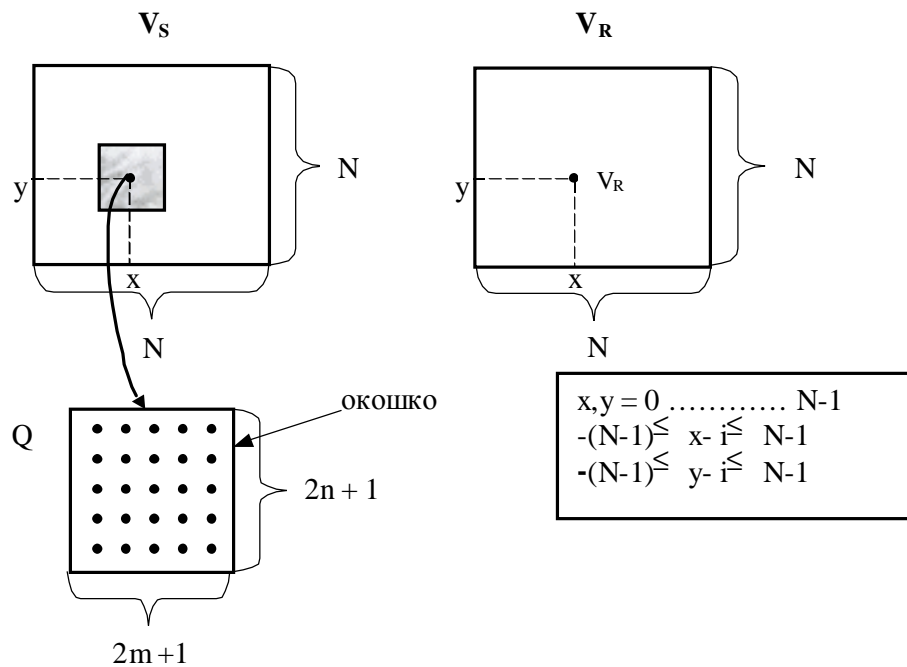
Изображение – плавная функция. Импульсный шум – точки вычисляются по отношению к областям окружностей.

Считаем среднее значение этих точек и в результирующем изображении в точку с координатами (x y) записываем исходную точку.

- 1) Усреднённая маска (3*3)
- 2) Медианный фильтр (3*3)
- 3) 1. Вычисление среднего значения.



$$\underline{2.} \quad V_R(x, y) = \begin{cases} V_S(x, y), & \text{при } |\bar{V} - V_S(x, y)| < P \\ \bar{V}, & \text{при } |\bar{V} - V_S(x, y)| \geq P \end{cases}$$

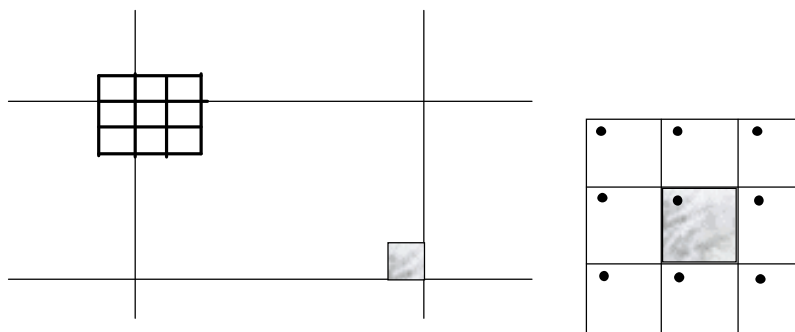


$Q'(-r, -q) = Q'(N-r, N-q)$ (свойство симметрии).

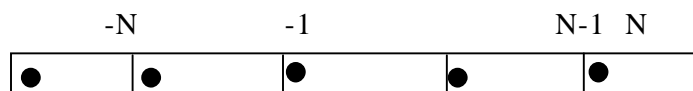
$$V_R(x, y) = \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-m}^m V_S(x+i, y+j) \cdot Q(n+i, m+j)$$

$$V_R(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} V_S(i, j) \cdot Q'(x-i, y-j)$$

- 1) Циклическое дополнение.



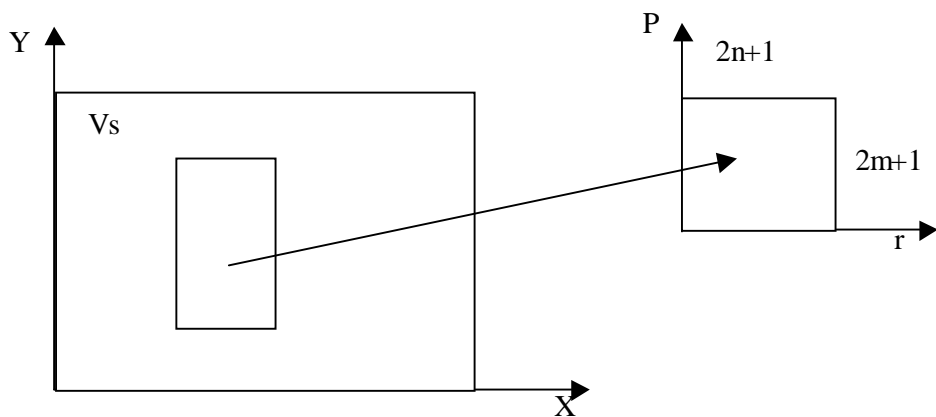
Для одной точки имеем следующую картинку:



2) Симметричное дополнение

14	13	12	11	11	12	13	14
4	3	2	1	1	2	3	4
4	3	2	1	1	2	3	4.....
14	13	12	11	11	12	13	14.....
				21	22	23	24.....
						

Формула для обработки окошка:
$$V_R(x, y) = \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-m}^m V_S(x+i, y+j) \cdot Q(n+i, m+j)$$



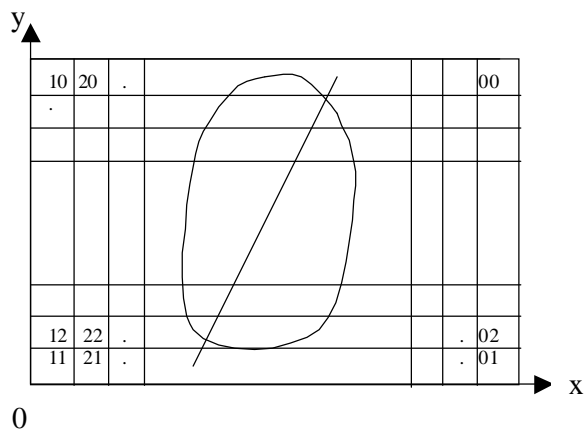
Формула для свертки:
$$V_R(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} V_S(i, y) \cdot Q'(x-i, y-j)$$

Пример

$Q - (2m + 1) * (2n + 1)$

$Q' - N * N$.

-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
02	12	22	-	-
01	11	21	-	-
00	10	20	-	-



Операция свертки – частный случай линейного преобразования.

Линейные преобразования

$F(n_1, n_2)$ – двумерная функция.

Тогда \bar{F} – её линейное преобразование.

$n_1, n_2, m_1, m_2 = 0 \dots \dots \dots N-1$.

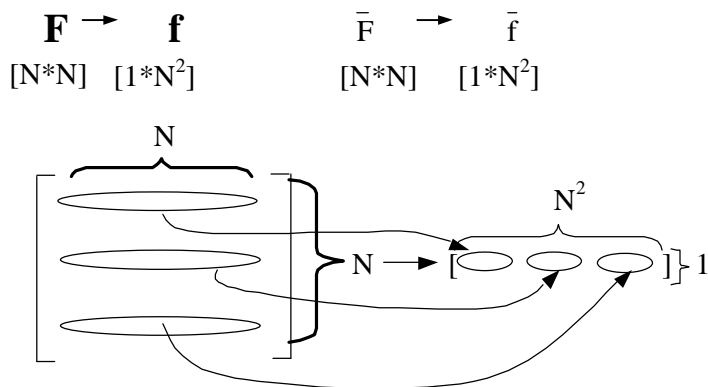
$$\bar{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} F(n_1, n_2) \cdot \underbrace{A(n_1, n_2, m_1, m_2)}_{\text{ядро линейного преобразования}}$$

Назовём это преобразование **прямым**.

Обратное преобразование

$$F(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \bar{F}(m_1, m_2) \cdot \underbrace{B(n_1, n_2, m_1, m_2)}_{\text{ядро обратного преобразования}}$$

Матричная форма.



$$\bar{f} = f \cdot A \quad \text{- прямое преобразование в матричной форме.}$$

$[1*N^2] \quad [1*N^2] \quad [N^2*N^2]$

$$f = \bar{f} \cdot B ; B = A^{-1} \text{ – обратное преобразование.}$$

Частные случаи линейных преобразований

1.) Разделимые линейные преобразования

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \mathbf{A}_c(\mathbf{n}_1, \mathbf{m}_1) \cdot \mathbf{A}_s(\mathbf{n}_2, \mathbf{m}_2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \mathbf{B}_c(\mathbf{n}_1, \mathbf{m}_1) \cdot \mathbf{B}_s(\mathbf{n}_2, \mathbf{m}_2)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_s^T$$

$$[\mathbf{N} \times \mathbf{N}] \quad [\mathbf{N} \times \mathbf{N}] \quad [\mathbf{N} \times \mathbf{N}] \quad [\mathbf{N} \times \mathbf{N}]$$

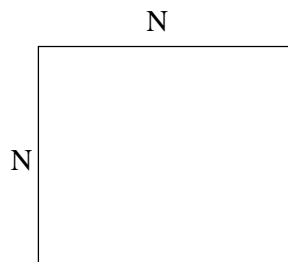
$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_c \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{B}_s^T; \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{A}_c^{-1}; \quad \mathbf{B}_s = \mathbf{A}_s^{-1}.$$

2.) Свёртка

$$V_R(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} V_S(i, j) \cdot \underbrace{Q'(x-i, y-j)}_{A(x, i, y, j)}$$

$A(x, i, y, j)$ – ядро.

Самое главное

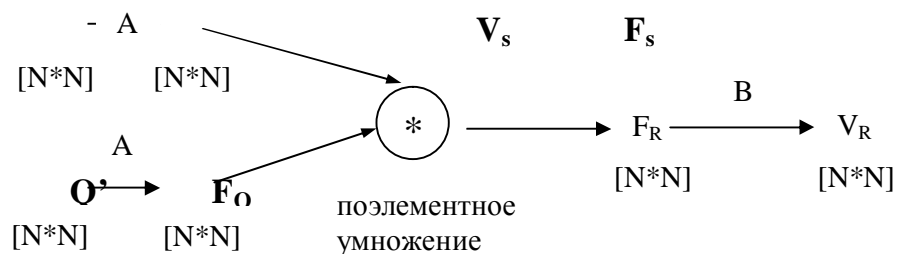


$L = (2m + 1)(2n + 1)$ – для каждой точки



сложность вычисления
пространственной области.

$$S_1 = L \cdot N^2$$



$$V_R(r_1, r_2) = \sum_i \sum_j V_S(i, j) \cdot Q'(r_1-i, r_2-j) \quad (1)$$

$$F_S(m_1, m_2) = \sum_{n1} \sum_{n2} V_S(n_1, n_2) \cdot A(n_1, n_2, m_1, m_2) \quad (2)$$

$$F_Q(q_1, q_2) = \sum_{l1} \sum_{l2} Q'(l_1, l_2) \cdot A(l_1, l_2, q_1, q_2) \quad (3)$$

$$V_R(r_1, r_2) = \sum_{p1} \sum_{p2} F_R(p_1, p_2) \cdot B(p_1, p_2, r_1, r_2) \quad (4)$$

$$F_R(i, j) = F_S(i, j) \cdot F_Q(i, j) \quad (5)$$

$$i, j = 0, \dots, N-1.$$

Подставим величины из формул (2), (3), (5) в формулу (4).

В результате этого мы получим :

$$V_R(r_1, r_2) = \sum_{p1} \sum_{p2} \left(\sum_{n1} \sum_{n2} V_S(n_1, n_2) \cdot A(n_1, n_2, p_1, p_2) \cdot \sum_{l1} \sum_{l2} Q'(l_1, l_2) \cdot \right.$$

$$\left. A(l_1, l_2, p_1, p_2) \right) \cdot B(p_1, p_2, r_1, r_2) = \sum_{n1} \sum_{n2} \sum_{l1} \sum_{l2} V_S(n_1, n_2) \cdot Q'(l_1, l_2) \cdot \underbrace{\sum_{p1} \sum_{p2}}$$

$$\underline{A(n_1, n_2, p_1, p_2) \cdot A(l_1, l_2, p_1, p_2) \cdot B(p_1, p_2, r_1, r_2)}$$

Выделенная в формуле подчёркиванием часть зависит только от ядер.

$$\text{Она равна } \begin{cases} 1 \text{ при } n_1 = r_1 - l_1 \text{ или } n_2 = r_2 - l_2 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$\delta(n_1+l_1-r_1) \cdot \delta(n_2+l_2-r_2)$ (дельта – функция.)

$$\delta(x) \equiv \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0 \\ 0 \text{ при } x \neq 0 \end{cases}$$

$$A(n_1, n_2, p_1, p_2) = A_S(n_1, p_1) \cdot A_C(n_2, p_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{допущение} \quad \begin{array}{l} A_S = A_C = A \\ B_S = B_C = B \end{array}$$

$$B(p_1, p_2, r_1, r_2) = B_S(p_1, r_1) \cdot B_C(p_2, r_2)$$

$$\sum_{p_1} \sum_{p_2} A(n_1, n_2, p_1, p_2) \cdot A(l_1, l_2, p_1, p_2) \cdot B(p_1, p_2, r_1, r_2) = \delta(n_1 + l_1 - r_1) \cdot \delta(n_2 + l_2 - r_2) \quad (**)$$

$$\delta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \pm N, \pm 2N \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$A(n_1, n_2, p_1, p_2) = A_S(n_1, p_1) \cdot A_C(n_2, p_2) \quad (1)$$

$$A_S = A_C \equiv A'$$

$$B(p_1, p_2, r_1, r_2) = B'(p_1, r_1) \cdot B'(p_2, r_2) \quad (2)$$

Воспользовавшись формулами (1) и (2) преобразуем выражение (**):

$$\begin{aligned} \sum_{p_1} A'(n_1, p_1) \cdot A'(l_1, p_1) \cdot B'(p_1, r_1) \cdot \sum_{p_2} A'(n_2, p_2) \cdot A'(l_2, p_2) \cdot B'(p_2, r_2) \\ = \\ = d(n_1 + l_1 - r_1) \cdot d(n_2 + l_2 - r_2) \end{aligned}$$

$$A'(n, p) = a^{np} ; \quad A'(l, p) = a^{lp} ; \quad B'(p, r) = \frac{1}{N} a^{-pr}$$

$$\frac{1}{N} \sum_p a^{p(n+l-r)} = d(n+l-r)$$

$$n+l-r \equiv n$$

$$\boxed{\sum_{p=0}^{N-1} a^{pn} = N \cdot \delta(n)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^n = \begin{cases} 1, & \text{при } n=0, \pm N, \pm 2N \\ \neq 1, & \text{если иначе.} \end{cases}}$$

(*)

Пусть $n = 0, \pm N$. (***)

Эквивалентность выражения (*) докажем, домножив обе части уравнения на

$$(1 - a^n).$$

$$\begin{aligned} (1 - a^n) \sum_{p=0}^{N-1} a^{pn} &= \sum_{p=0}^{N-1} a^{pn} - \sum_{p=0}^{N-1} a^{n(p+1)} = 1 + \sum_{p=1}^{N-1} a^{pn} - \sum_{p=1}^{N-1} a^{pN} - \underbrace{a^{nN}}_1 = 1 - (a^N)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} 1 = N \cdot d(0) ; \text{аналогично для } n=N, -N.$$

Теперь уравнение (***) будет основным

Решим его :

$$a^N = 1 = e^{i \cdot 2\pi} - \text{комплексное преобразование 1.}$$

$$a = e^{i \cdot 2\pi/N} - \text{решение в области комплексных чисел.}$$

$$\begin{aligned}\overline{F(n)} &= \sum_n a^{nm} \cdot F(n) = \sum_n e^{i \cdot (2\pi/N) \cdot n \cdot m} \cdot F(n) = \\ &= \underbrace{\sum_n F(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right)}_{\text{Re}} + i \cdot \underbrace{\sum_n F(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right)}_{\text{Im}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(n) &= \frac{1}{N} \cdot \sum_m a^{-nm} \cdot \overline{F(m)} = \frac{1}{N} \sum_m e^{i \cdot (2\pi/N) \cdot n \cdot m} \cdot \overline{F(m)} = \frac{1}{N} \sum_m \overline{F(m)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right) - \\ &- i \cdot \frac{1}{N} \sum_m \overline{F(m)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right)\end{aligned}$$

Связь между спектральными коэффициентами и корреляционной функцией
Пусть имеется входной сигнал, описываемый функцией $F(n)$. Тогда квадрат коэффициента корреляции k равен:

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{1}{N} \sum_n F(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m + y\right) = \frac{1}{N} \sum_n F(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right) \cdot \cos(y) + \frac{1}{N} \\ &\sum_n F(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right) \cdot \sin(y)\end{aligned}$$

Так как $\overline{F(n)} = \text{Re} + i \text{Im}$

Принимая $\text{Im} = \frac{1}{N} \sum_n F(n) \sin \frac{2\pi}{N} nm$, и $\text{Re} = \frac{1}{N} \sum_n F(n) \cos \frac{2\pi}{N} nm$, получим:

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{1}{N} \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \sin(y + \arctg \frac{\text{Re}}{\text{Im}}) = \frac{1}{N} |\overline{F(n)}| \sin(y + j) = k^2 \\ y &= \arctg \frac{\text{Re}}{\text{Im}} ; \quad \sin(y) = \frac{\text{Re}}{|F(n)|} ; \quad \cos(y) = \frac{\text{Im}}{|F(n)|}\end{aligned}$$

Оценка сложности:

1. Вычисляются спектральные коэффициенты строк
 2. Вычисляются спектральные коэффициенты столбцов
- Для каждого отсчета надо сделать N операций

$$S_1 = N \cdot \frac{N}{2} \cdot k,$$

где N — сложность вычисления одного коэффициента, k — коэффициент сложности работы с комплексными числами

Сложность прямого преобразования:

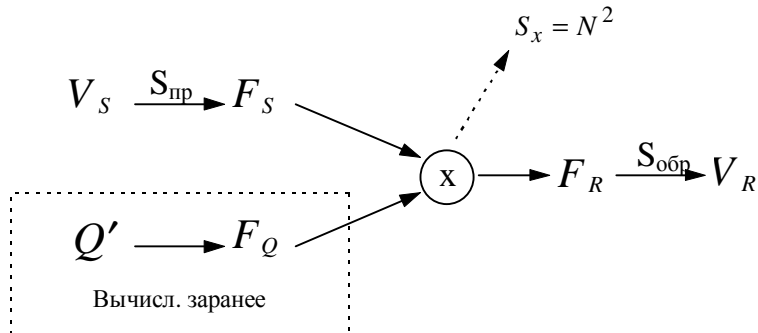
$$S'_{np} = S_1 \cdot N = \frac{N^3}{2} \cdot k \quad \text{— это только по строкам}$$

Аналогично получается сложность по столбцам

Тогда общая сложность:

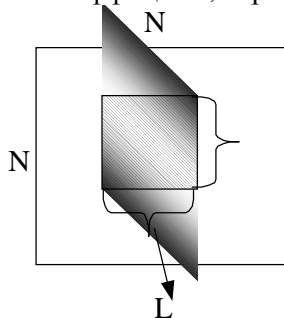
$S_{np} = N^3 \cdot k$ — суммарная сложность прямого преобразования

$S_{обр} = S_{np}$



$$S_{\Sigma} = S_{np} + S_{обр} = 2N^3 \cdot k$$

k — коэффициент, отражающий специфику работы с комплексными числами.



$$S = L^2 \cdot N^2$$

S — суммарная сложность.

Сравним S_{Σ} и S :

$$2N^3k < N^2L^2 \Rightarrow L > \sqrt{2Nk}$$

Проверка

Пусть $N=512$; $k=2$.

Ответ : $L > 45$. — выгодно использовать пространственное преобразование при больших фильтрах.

Теоретико-числовые преобразования

Решаем уравнения

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{при } n=0, \pm N \\ \neq 1, & \text{если иначе} \end{cases}$$

Могут быть найдены решения в кольце целых чисел по модулю M .

Например, рассмотрим кольцо по модулю 5, т. е. работаем только с числами 0, 1, 2, 3, 4.

$M=5$

Могут быть определены все арифметические операции и результаты, не выходящие за пределы кольца целых чисел.

Например, таблица для сложения:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Пояснение

Например если мы выполняем сложение $3+3=6$. То в этой таблице на пересечении соответствующей строки и соответствующего столбца будет **1**.

Это объясняется тем, что результат сложения делится на модуль (в данном случае =5.) и остаток этого деления заносится в таблицу. (в данном случае остаток =1)

Рассмотрим функцию Эйлера:

Функция Эйлера $\Psi(M)$ - равна количеству чисел, меньших M и не имеющих с ним общих множителей. Следовательно, функция Эйлера от простого числа будет равна самому этому числу минус 1, т.е. $\Psi(P) = P - 1$

$j(q1; q2) = j(q1) \cdot j(q2)$ – фундаментальное значение в теории чисел.

Теорема Ферма-Эйлера.

В кольце целых чисел всегда существует такое основание a , при котором:

Если a, M не имеют общих множителей.

$(a, M) = 1 \implies$ наибольший общий делитель $= 1$.

Тогда имеет место соотношение :

$$a^{\Psi(M)} = 1 \pmod{M}$$

a — основание, M — модуль, N — количество отсчетов.

Следствие

1. Если число M — простое, то $\Psi(M) = M - 1$

Известно N , надо найти M .

$a^N = a^{\Psi(M)} = 1$ - не всякое число M может являться решением данного уравнения.

$a^n = 1$, если n -делитель $\Psi(M)$.

Теорема Ферма-Эйлера –2

В кольце целых чисел по модулю M всегда найдутся числа a, M такие,

что

$$a^N = 1 \pmod{M}.$$

$$a^{n \pm N} \pm 1 \pmod{M}.$$

N – это делитель $\Psi(M)$.

Если число $M = 2, 4, P^a, 2 \cdot P^a$ - то любой делитель $\Psi(M) = N$.

возьмём для частного случая

P – простое число, a — степень

Если $n = 2^q$, то число является простым

$2^n + 1 = 2^r + 1$ – числа Ферма.

где $r = 2^q$

$M = 2^{2^q} + 1$ - числа Ферма.

Числа являются простыми не для любого q .

На сегодняшний день известны значения $q=0,1,2,3,4$.

Q	0	1	2	3	4
N	1	2	4	8	16
N	2	4	16	256	65536
M	3	5	17	257	65537
0	2	2	3	3	3

a – удовлетворяющее данным условиям.

Пересчитаем основание **a**:

$$N' = \frac{N}{2^a};$$

$$(a')^N = 1 \iff (a')^{N/2^a} = 1 \iff a' = a^z, \text{ где } z=2^a.$$

Если изображение имеет размер 1024 * 1024 пиксела, то
M = 65537 ; a=3 ; N = 65536.

Достоинства и недостатки методов:

Фурье.

Недостатки: используем комплексные числа, числа все иррациональные, нет возможности использовать для малой разрядной сетки.

Достоинства: работа в традиционной арифметике, коэффициенты Фурье имеют простой физический смысл.

Теоретико-числовые преобразования:

Недостатки: арифметика по модулю M, коэффициенты носят абстрактный характер.

Достоинства: вся работа с целыми числами, маленькая разрядная сетка (17 разрядов).

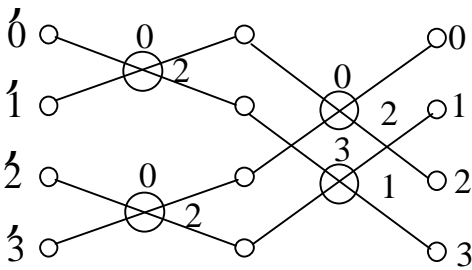
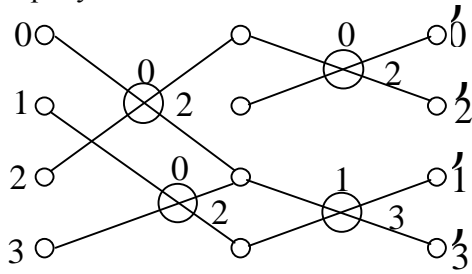
Существуют **быстрые алгоритмы взятия линейного преобразования**:

Выигрыш может быть получен при использовании метода быстрых теоретико-числовых преобразований. Этот метод наиболее эффективен, если число отсчетов $N = 2^n$

$$x_l = \sum_{i=0}^N x_i a^{il}$$

Схема одномерного преобразования:

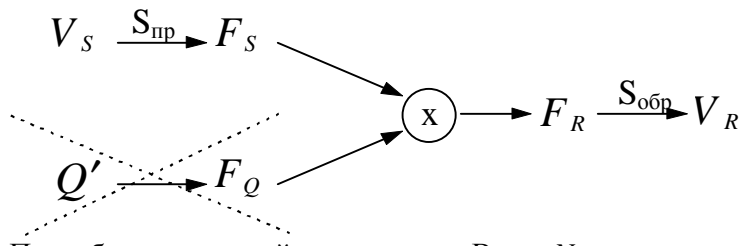
Нарисуем для $n=4$:



Количество ступеней для числа $n = \log_2 N$

Число выходов на каждой ступени – $2N$.

Вернемся к схеме преобразования:



Пренебрегаем данной сложностью. Всего N строк, на каждой строке $N \log_2 N$, всего $N^2 \log_2 N$

Сложность прямого преобразования $2N^2 \log_2 N$

Сложность быстрого преобразования:

$S_{БП} = (4N^2 \log_2 N)k$, где k — коэффициент сложности

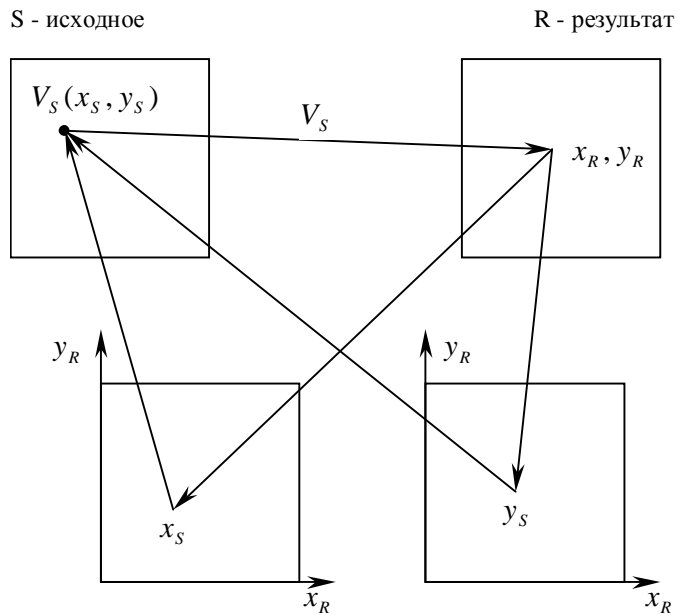
Рассмотрим случай, когда $N^2 L^2 > kYN^2 \log_2 N$.

Т. е. $L > 2\sqrt{k \log_2 N}$

Например, $N=512$, $k=3$

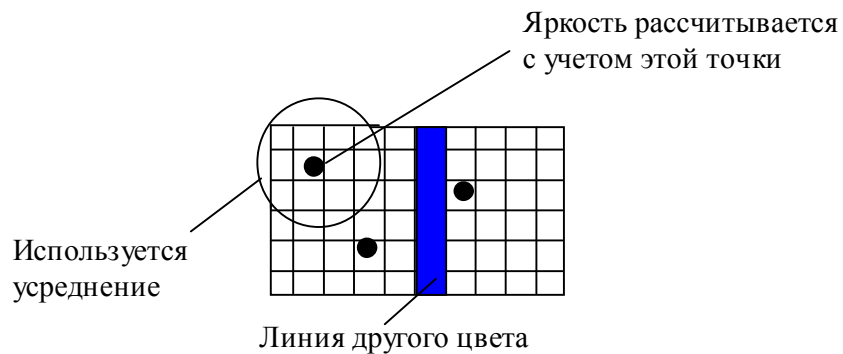
3. Схема обратного пересчета

$$\begin{cases} x_s = F_x(x_R, y_R) \\ y_s = F_y(x_R, y_R) \end{cases}$$



По результирующим координатам вычисляются текущие точки. Здесь идет перебор всех точек результирующего изображения. V_S переписывает из S в R .

Достоинство: не будет дырок как в предыдущем случае



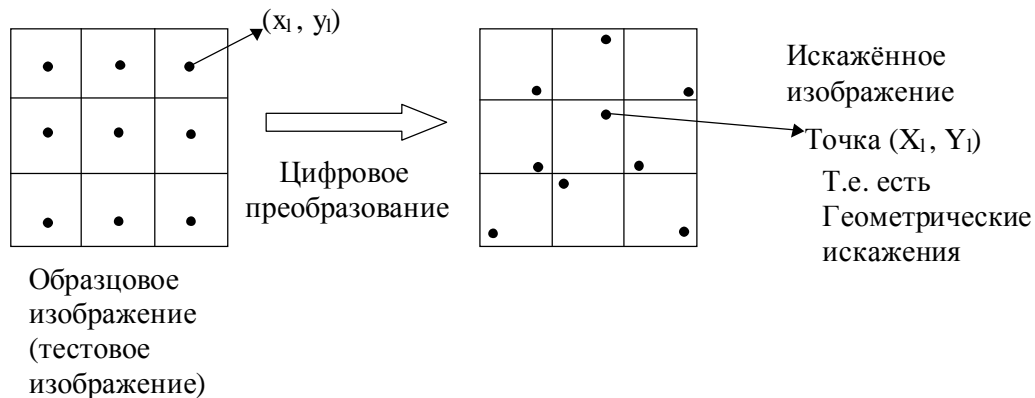
Линию другого цвета мы не видим. Чтобы ее увидеть необходимо использовать усредненное значение.

Рассмотрим задачу в плане реставрации.

Деформация изображения.

Имеется система, на вход которой подаются изображения:

$l = 1 \dots L$ (пусть у нас l -текстовых точек).



Цифровое преобразование, то есть находим функции преобразования координат, которые позволяют перейти к точке с координатами (x_l, y_l) , то есть мы ищем функции (выражения записаны для схемы обратного пересчёта):

$$X = F_x(x, y)$$

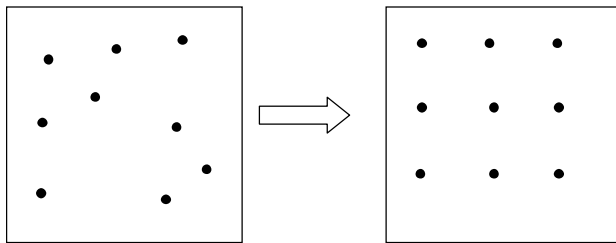
$$Y = F_y(x, y)$$



Мы постараемся найти функции, которые могут описать уход точек.

$$\begin{cases} X_l = F_x(x_l, y_l) \\ Y_l = F_y(x_l, y_l) \end{cases}$$

Мы будем работать по схеме обратного пересчёта.



Искажённое
изображение

Реставрационное
изображение

Мы перебираем точки реставрационного изображения. Решение задачи простое, если функции искать в области двумерных полиномов. Для каждой точки с координатой (x, y) мы выполняем обратный пересчёт

- для y с использованием F_y
- для x с использованием F_x

$$F_x(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n \cdot x^{i(n)} \cdot y^{j(n)}$$

$$F_y(x, y) = \sum_{n=1}^N B_n \cdot x^{i(n)} \cdot y^{j(n)}$$

$$0 \leq i(n) + j(n) \leq k$$

$$n = 1 \dots N$$

$$N = \frac{1}{2} (k+1)(k+2)$$

$$\text{При } k=2; \implies N=6$$

n	1	2	3	4	5	6
I(n)	0	1	2	0	1	0
J(n)	0	0	0	1	1	2

При данном
распределении

$$F_x(x, y) = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot x^2 + A_4 \cdot y + A_5 \cdot xy + A_6 \cdot y^2$$

Ищем коэффициенты полиномов так чтобы реставрация произошла как можно лучше. Запишем остаточное отклонение, которое мы хотим минимизировать.

$$D = \sum_{l=1}^L (X_l - F_x(X_l, Y_l))^2 + (Y_l - F_y(X_l, Y_l))^2$$

$$D = 0;$$

Будем устремлять D к **min**.

$$\{A_n, B_n\} = \text{Argmin} [D(x_l, y_l, X_l, Y_l, A_n, B_n)]$$

при условии, что: $L = 1 \dots 4$, $n = 1 \dots N$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial D}{\partial A_n} = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial B_n} = 0 \end{array} \right\} \text{ это даёт } D_{\min} \text{ при } n = 1 \dots N$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^N A_n \sum_{l=1}^L t_{l,n} \cdot t_{l,m} = \sum_{l=1}^L X_l \cdot t_{l,m} \quad m = 1 \dots N \\ \sum_{n=1}^N B_n \sum_{l=1}^L t_{l,n} \cdot t_{l,m} = \sum_{l=1}^L Y_l \cdot t_{l,m} \quad m = 1 \dots N \end{array} \right.$$

где : $t_{l,m} = x_l^{i(m)} \cdot y_l^{j(m)}$

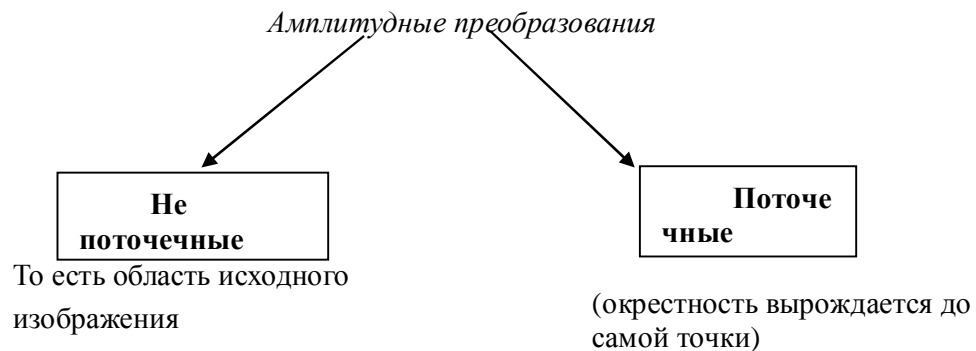
Случайная величина: $\delta = \sqrt{\frac{D}{L}}$

Если $\delta \approx 0.5 \Rightarrow$ отклонение от пиксела ± 0.5
Степень полинома берут, начиная с 2, 3, 4, ...

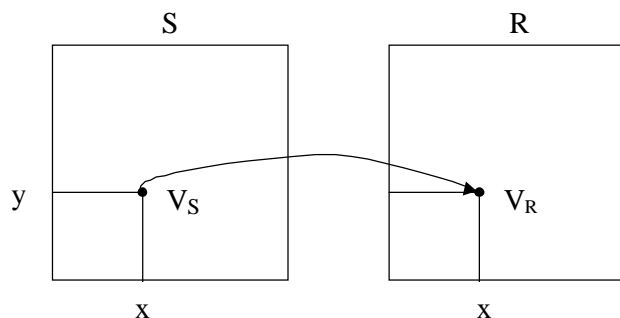
Теперь давайте поподробнее поговорим об амплитудных преобразованиях. Они связаны с изменением яркости точки.

Классификация амплитудных преобразований

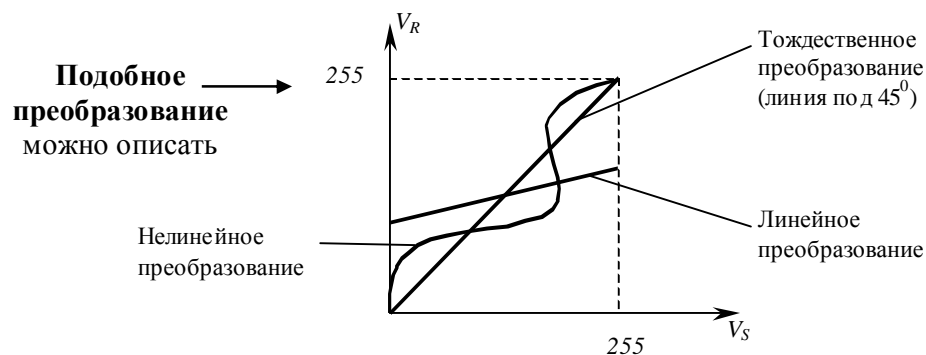
$$V_R(x,y) = f(\{V_s(x+i,y+i), i \in [-n,n], j \in [-m,m]\}, x,y)$$



Поточечные амплитудные преобразования (пространственно независимые)

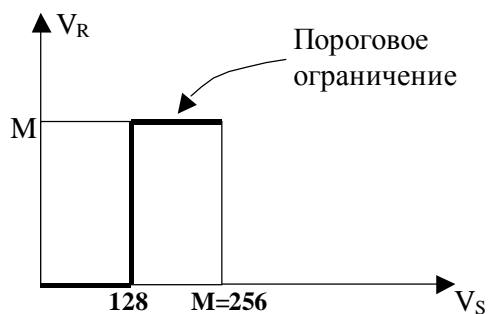


Поточечные амплитудные преобразования характеризуются функцией преобразования вектора (говорим о черно-белом изображении).

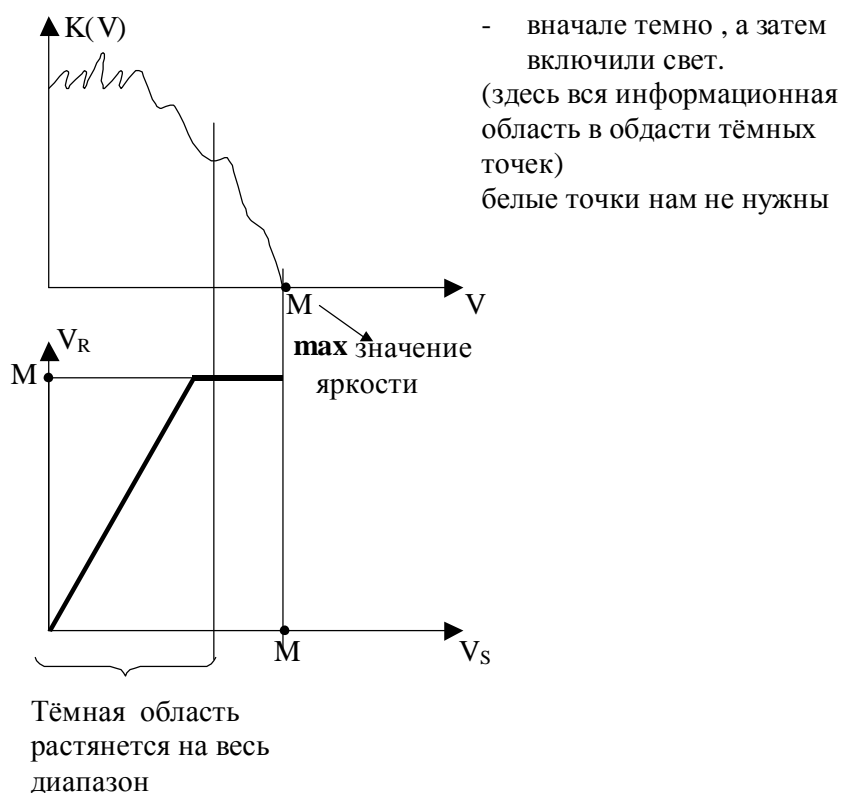


Виды зависимостей

Кусочно – линейные АП.



Сделанный снимок получился темным. Теперь посчитаем гистограмму частности кодов яркости изображения.

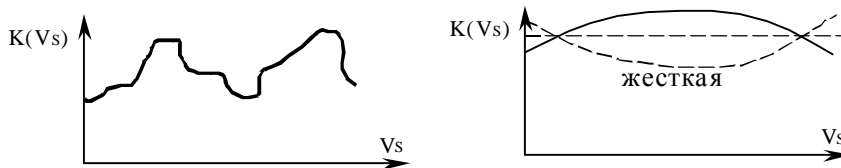


$K(V)$ – количество кодов , имеющих яркость V .

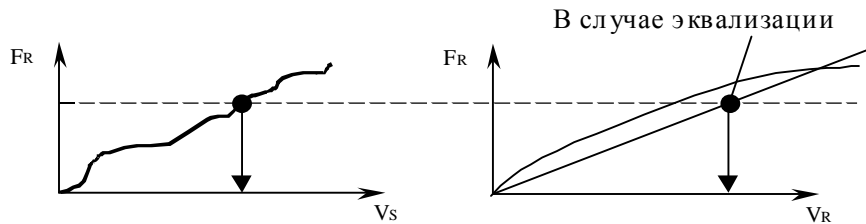
Кусочно – нелинейные АП

Результатом нелинейного преобразования является эквализация (выравнивание) гистограммы. В результате применения этого преобразования увеличивается контрастность, так как после линейных преобразований гистограмма «квадратеет» – это преобразование ее закругляет. Выход гистограммы в идеале должен быть прямой линией.

Частный случай эквализации



Необходимо найти зависимость V_R от V_S . Для этого строим следующую функцию распределения:



$$F_S(V_S) = \sum_{j=0}^{V_R} K_S(i) \text{ - формула функции распределения}$$

$F_S(V_S)$ – функция распределения кодов яркости исходного изображения.
Решая представленное ниже уравнение, мы найдём зависимость $V_R(V_S)$

$$F_R(V_R) = F_S(V_S)$$

$$F_R(V_R) = \sum_{i=0}^{V_R} K_R(i)$$

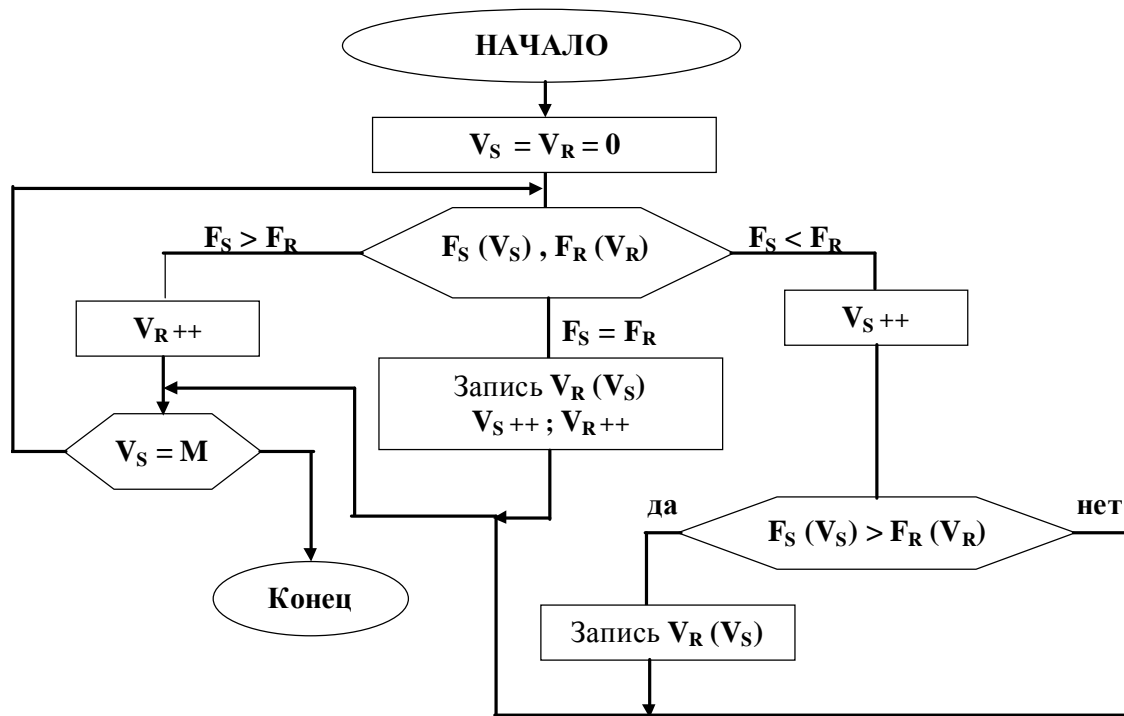
Проводя соответствующее число
линий по графику функций F_S и
 F_R (как показано выше),
находим соответствующее число
значений зависимости $V_R(V_S)$.

$$V_S = 0 \dots \dots \dots M$$

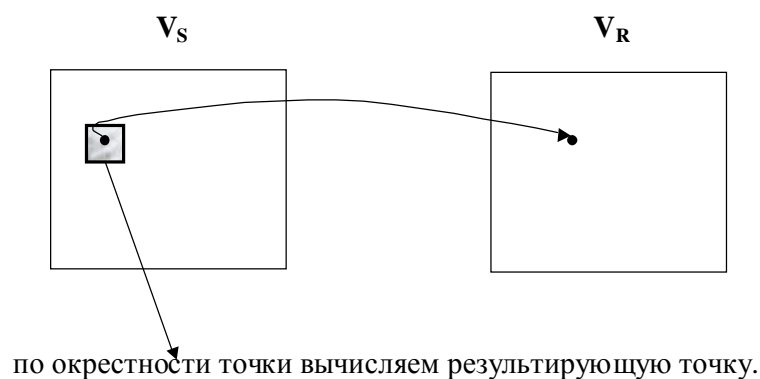
$$V_R = 0 \dots \dots \dots M$$

$$\sum_{i=0}^M K_S(i) = \sum_{j=0}^M K_R(j) = N^2 \text{ - число точек на изображении (N*N)}$$

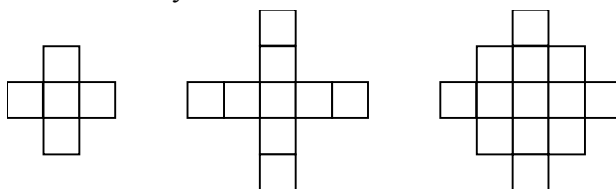
Теперь рассмотрим алгоритм решения задачи нахождения значений зависимости $V_R(V_S)$.



Пространственно независимые непоточечные амплитудные преобразования.



Бывают следующие виды окон:



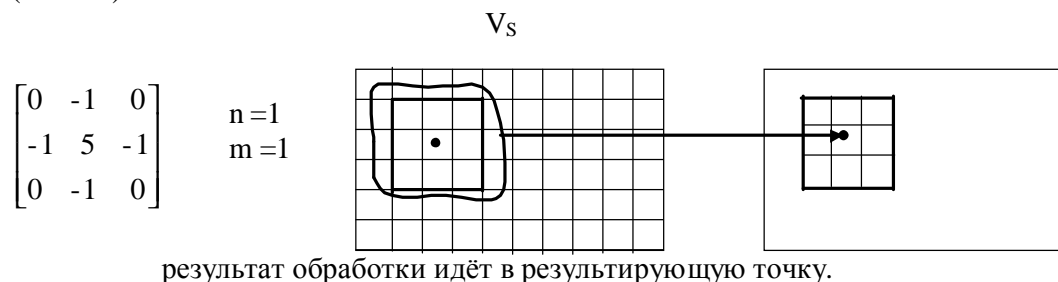
С целью повышения резкости используются маленькие окошки 3 на 3 элемента. Все эти окошки обрабатываются по принципу суммирования кодов яркости исходного изображения.

На исходное изображение накладывается некоторая маска.

Основные функции оконного преобразования

3. Линейные преобразования (взвешанное суммирование). Каждый элемент имеет яркость, и результирующую яркость находим, суммируя все яркости. Например:

Маска 1
(Окно 1)



результат обработки идёт в результирующую точку.

Задачу повышения четкости решаем следующим образом:

Маска 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

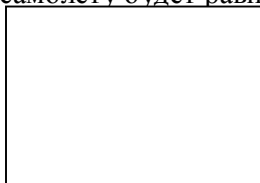
Маска 3

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Проходя несколько раз по этим окошечкам, можно получить зернистое изображение.

Пример:

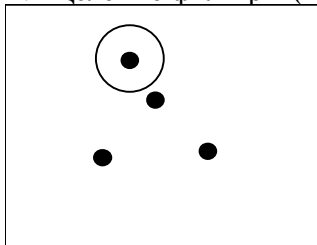
Маска (изображен самолет). Этой маске можно сопоставить коэффициенты соответствующие изображению. Все, что не относится к самолету будет равно 0.



изображение, которое
надо обработать

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

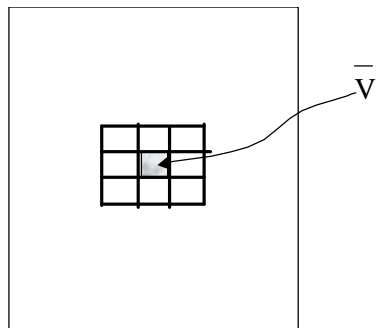
4. Целевые фильтры (импульсная фильтрация)



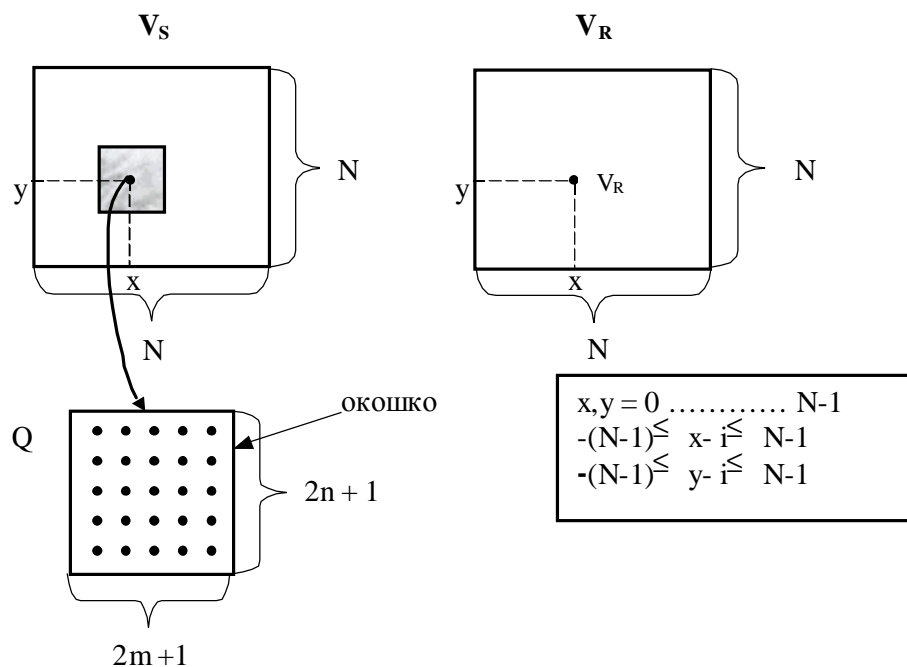
Изображение – плавная функция. Импульсный шум – точки вычисляются по отношению к областям окружностей.

Считаем среднее значение этих точек и в результирующем изображении в точку с координатами (x y) записываем исходную точку.

- 4) Усреднённая маска (3*3)
- 5) Медианный фильтр (3*3)
- 6) 1. Вычисление среднего значения.



$$\underline{2.} \quad V_R(x, y) = \begin{cases} V_S(x, y), & \text{при } |\bar{V} - V_S(x, y)| < P \\ \bar{V}, & \text{при } |\bar{V} - V_S(x, y)| \geq P \end{cases}$$

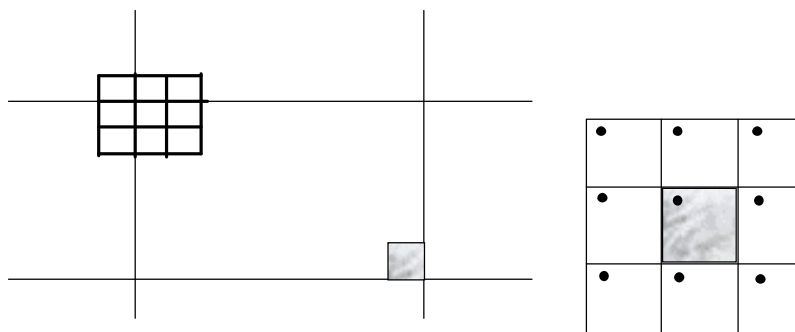


$Q'(-r, -q) = Q'(N-r, N-q)$ (свойство симметрии).

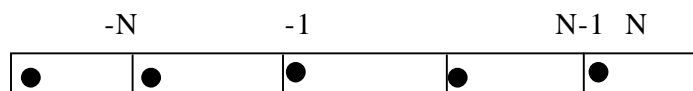
$$V_R(x, y) = \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-m}^m V_S(x+i, y+j) \cdot Q(n+i, m+j)$$

$$V_R(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} V_S(i, j) \cdot Q'(x-i, y-j)$$

- 3) Циклическое дополнение.



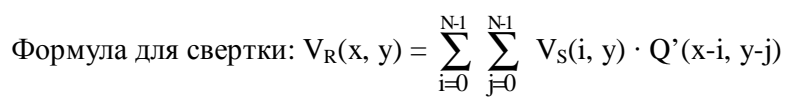
Для одной точки имеем следующую картинку:



4) Симметричное дополнение

14	13	12	11	11	12	13	14
4	3	2	1	1	2	3	4
4	3	2	1	1	2	3	4
14	13	12	11	11	12	13	14
				21	22	23	24
						

Формула для обработки окошка:
$$V_R(x, y) = \sum_{i=-n}^n \sum_{j=-m}^m V_S(x+i, y+j) \cdot Q(n+i, m+j)$$



-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
02	12	22	-	-
01	11	21	-	-
00	10	20	-	-

Операция свертки – частный случай линейного преобразования.

Линейные преобразования

$F(n_1, n_2)$ – двумерная функция.

Тогда \bar{F} – её линейное преобразование.

$n_1, n_2, m_1, m_2 = 0 \dots \dots \dots N-1$.

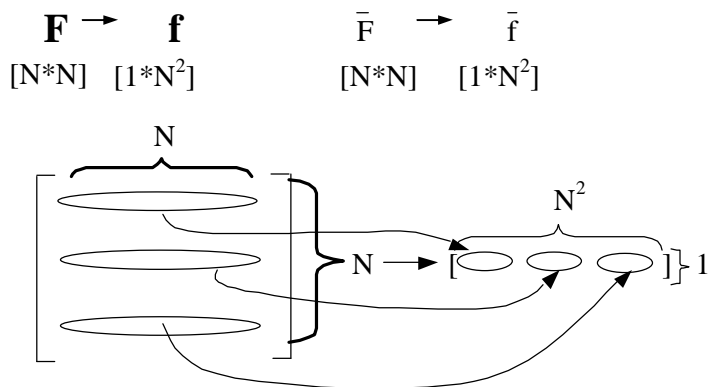
$$\bar{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} F(n_1, n_2) \cdot \underbrace{A(n_1, n_2, m_1, m_2)}_{\text{ядро линейного преобразования}}$$

Назовём это преобразование **прямым**.

Обратное преобразование

$$F(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{N-1} \sum_{m_2=0}^{N-1} \bar{F}(m_1, m_2) \cdot \underbrace{B(n_1, n_2, m_1, m_2)}_{\text{ядро обратного преобразования}}$$

Матричная форма.



$$\bar{f} = f \cdot A \quad \text{- прямое преобразование в матричной форме.}$$

$[1*N^2] \quad [1*N^2] \quad [N^2*N^2]$

$$f = \bar{f} \cdot B ; B = A^{-1} \text{ – обратное преобразование.}$$

Частные случаи линейных преобразований

3.) Разделимые линейные преобразования

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \mathbf{A}_c(\mathbf{n}_1, \mathbf{m}_1) \cdot \mathbf{A}_s(\mathbf{n}_2, \mathbf{m}_2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \mathbf{B}_c(\mathbf{n}_1, \mathbf{m}_1) \cdot \mathbf{B}_s(\mathbf{n}_2, \mathbf{m}_2)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_s^T$$

$$[\mathbf{N} \times \mathbf{N}] \quad [\mathbf{N} \times \mathbf{N}] \quad [\mathbf{N} \times \mathbf{N}] \quad [\mathbf{N} \times \mathbf{N}]$$

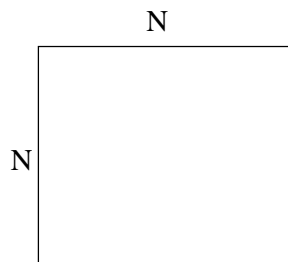
$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_c \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{B}_s^T; \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{A}_c^{-1}; \quad \mathbf{B}_s = \mathbf{A}_s^{-1}.$$

4.) Свёртка

$$V_R(x, y) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} V_S(i, j) \cdot \underbrace{Q'(x-i, y-j)}_{A(x, i, y, j)}$$

$A(x, i, y, j)$ – ядро.

Самое главное

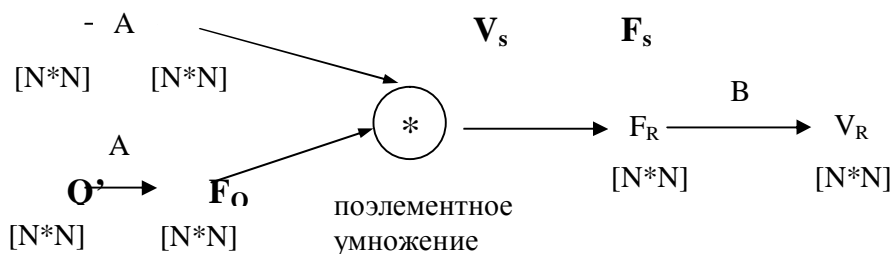


$L = (2m + 1)(2n + 1)$ – для каждой точки



сложность вычисления
пространственной области.

$$S_1 = L \cdot N^2$$



$$V_R(r_1, r_2) = \sum_i \sum_j V_S(i, j) \cdot Q'(r_1-i, r_2-j) \quad (1)$$

$$F_S(m_1, m_2) = \sum_{n1} \sum_{n2} V_S(n_1, n_2) \cdot A(n_1, n_2, m_1, m_2) \quad (2)$$

$$F_Q(q_1, q_2) = \sum_{l1} \sum_{l2} Q'(l_1, l_2) \cdot A(l_1, l_2, q_1, q_2) \quad (3)$$

$$V_R(r_1, r_2) = \sum_{p1} \sum_{p2} F_R(p_1, p_2) \cdot B(p_1, p_2, r_1, r_2) \quad (4)$$

$$F_R(i, j) = F_S(i, j) \cdot F_Q(i, j) \quad (5)$$

$$i, j = 0, \dots, N-1.$$

Подставим величины из формул (2), (3), (5) в формулу (4).

В результате этого мы получим :

$$V_R(r_1, r_2) = \sum_{p1} \sum_{p2} \left(\sum_{n1} \sum_{n2} V_S(n_1, n_2) \cdot A(n_1, n_2, p_1, p_2) \cdot \sum_{l1} \sum_{l2} Q'(l_1, l_2) \cdot \right.$$

$$\left. A(l_1, l_2, p_1, p_2) \right) \cdot B(p_1, p_2, r_1, r_2) = \sum_{n1} \sum_{n2} \sum_{l1} \sum_{l2} V_S(n_1, n_2) \cdot Q'(l_1, l_2) \cdot \underbrace{\sum_{p1} \sum_{p2}}$$

$$\underline{A(n_1, n_2, p_1, p_2) \cdot A(l_1, l_2, p_1, p_2) \cdot B(p_1, p_2, r_1, r_2)}$$

Выделенная в формуле подчёркиванием часть зависит только от ядер.

$$\text{Она равна } \begin{cases} 1 \text{ при } n_1 = r_1 - l_1 \text{ или } n_2 = r_2 - l_2 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$\delta(n_1+l_1-r_1) \cdot \delta(n_2+l_2-r_2)$ (дельта – функция.)

$$\delta(x) \equiv \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0 \\ 0 \text{ при } x \neq 0 \end{cases}$$

$$A(n_1, n_2, p_1, p_2) = A_S(n_1, p_1) \cdot A_C(n_2, p_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{допущение} \quad \begin{array}{l} A_S = A_C = A \\ B_S = B_C = B \end{array}$$

$$B(p_1, p_2, r_1, r_2) = B_S(p_1, r_1) \cdot B_C(p_2, r_2)$$

$$\sum_{p_1} \sum_{p_2} A(n_1, n_2, p_1, p_2) \cdot A(l_1, l_2, p_1, p_2) \cdot B(p_1, p_2, r_1, r_2) = \delta(n_1+l_1-r_1) \cdot \delta(n_2+l_2-r_2) \quad (**)$$

$$\delta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \pm N, \pm 2N \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$A(n_1, n_2, p_1, p_2) = A_S(n_1, p_1) \cdot A_C(n_2, p_2) \quad (1)$$

$$A_S = A_C \equiv A'$$

$$B(p_1, p_2, r_1, r_2) = B'(p_1, r_1) \cdot B'(p_2, r_2) \quad (2)$$

Воспользовавшись формулами (1) и (2) преобразуем выражение (**):

$$\begin{aligned} \sum_{p_1} A'(n_1, p_1) \cdot A'(l_1, p_1) \cdot B'(p_1, r_1) \cdot \sum_{p_2} A'(n_2, p_2) \cdot A'(l_2, p_2) \cdot B'(p_2, r_2) \\ = \\ = d(n_1+l_1-r_1) \cdot d(n_2+l_2-r_2) \end{aligned}$$

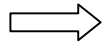
$$A'(n, p) = a^{np} ; \quad A'(l, p) = a^{lp} ; \quad B'(p, r) = \frac{1}{N} a^{-pr}$$

$$\frac{1}{N} \sum_p a^{p(n+l-r)} = d(n+l-r)$$

$$n+l-r \equiv n$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} a^{pn} = N \cdot \delta(n)$$

(*)



$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{при } n=0, \pm N, \pm 2N \\ \neq 1, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Пусть $n = 0, \pm N$. (***)

Эквивалентность выражения (*) докажем, домножив обе части уравнения на

$$(1 - a^n).$$

$$\begin{aligned} (1 - a^n) \sum_{p=0}^{N-1} a^{pn} &= \sum_{p=0}^{N-1} a^{pn} - \sum_{p=0}^{N-1} a^{n(p+1)} = 1 + \sum_{p=1}^{N-1} a^{pn} - \sum_{p=1}^{N-1} a^{pN} - \underbrace{a^{nN}}_1 = 1 - (a^N)^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{p=0}^{N-1} 1 = N \cdot d(0) ; \text{аналогично для } n=N, -N.$$

Теперь уравнение (***) будет основным

Решим его :

$$a^N = 1 = e^{i \cdot 2\pi} - \text{комплексное преобразование 1.}$$

$$a = e^{i \cdot 2\pi/N} - \text{решение в области комплексных чисел.}$$

$$\begin{aligned}\overline{F(n)} &= \sum_n a^{nm} \cdot F(n) = \sum_n e^{i \cdot (2\pi/N) \cdot n \cdot m} \cdot F(n) = \\ &= \underbrace{\sum_n F(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right)}_{\text{Re}} + i \cdot \underbrace{\sum_n F(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right)}_{\text{Im}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(n) &= \frac{1}{N} \cdot \sum_m a^{-nm} \cdot \overline{F(m)} = \frac{1}{N} \sum_m e^{i \cdot (2\pi/N) \cdot n \cdot m} \cdot \overline{F(m)} = \frac{1}{N} \sum_m \overline{F(m)} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right) - \\ &\quad - i \cdot \frac{1}{N} \sum_m \overline{F(m)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right)\end{aligned}$$

Связь между спектральными коэффициентами и корреляционной функцией
Пусть имеется входной сигнал, описываемый функцией $F(n)$. Тогда квадрат коэффициента корреляции k равен:

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{1}{N} \sum_n F(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m + y\right) = \frac{1}{N} \sum_n F(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right) \cdot \cos(y) + \frac{1}{N} \\ &\quad \sum_n F(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot m\right) \cdot \sin(y)\end{aligned}$$

Так как $\overline{F(n)} = \text{Re} + i \text{Im}$

Принимая $\text{Im} = \frac{1}{N} \sum_n F(n) \sin \frac{2\pi}{N} nm$, и $\text{Re} = \frac{1}{N} \sum_n F(n) \cos \frac{2\pi}{N} nm$, получим:

$$\begin{aligned}k^2 &= \frac{1}{N} \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \sin(y + \arctg \frac{\text{Re}}{\text{Im}}) = \frac{1}{N} |\overline{F(n)}| \sin(y + j) = k^2 \\ y &= \arctg \frac{\text{Re}}{\text{Im}} ; \quad \sin(y) = \frac{\text{Re}}{|F(n)|} ; \quad \cos(y) = \frac{\text{Im}}{|F(n)|}\end{aligned}$$

Оценка сложности:

3. Вычисляются спектральные коэффициенты строк

4. Вычисляются спектральные коэффициенты столбцов

Для каждого отсчета надо сделать N операций

$$S_1 = N \cdot \frac{N}{2} \cdot k,$$

где N — сложность вычисления одного коэффициента, k — коэффициент сложности работы с комплексными числами

Сложность прямого преобразования:

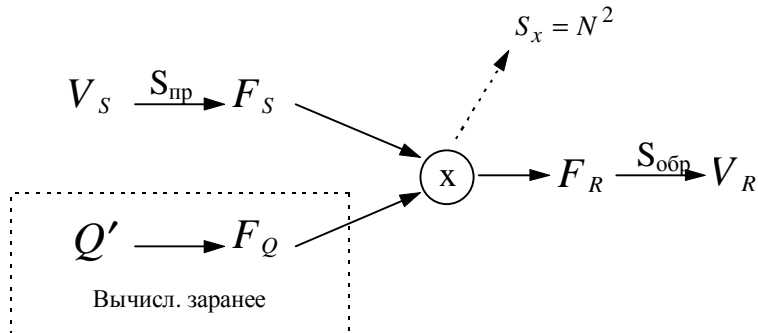
$$S'_{np} = S_1 \cdot N = \frac{N^3}{2} \cdot k \quad \text{— это только по строкам}$$

Аналогично получается сложность по столбцам

Тогда общая сложность:

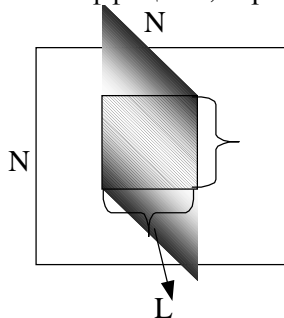
$S_{np} = N^3 \cdot k$ — суммарная сложность прямого преобразования

$S_{обр} = S_{np}$



$$S_{\Sigma} = S_{np} + S_{обр} = 2N^3 \cdot k$$

k — коэффициент, отражающий специфику работы с комплексными числами.



$$S = L^2 \cdot N^2$$

S — суммарная сложность.

Сравним S_{Σ} и S :

$$2N^3k < N^2L^2 \Rightarrow L > \sqrt{2Nk}$$

Проверка

Пусть $N=512$; $k=2$.

Ответ: $L > 45$. — выгодно использовать пространственное преобразование при больших фильтрах.

Теоретико-числовые преобразования

Решаем уравнения

$$a^n = \begin{cases} 1, & \text{при } n=0, \pm N \\ \neq 1, & \text{если иначе} \end{cases}$$

Могут быть найдены решения в кольце целых чисел по модулю M .

Например, рассмотрим кольцо по модулю 5, т. е. работаем только с числами 0, 1, 2, 3, 4.

$M=5$

Могут быть определены все арифметические операции и результаты, не выходящие за пределы кольца целых чисел.

Например, таблица для сложения:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Пояснение

Например если мы выполняем сложение $3+3=6$. То в этой таблице на пересечении соответствующей строки и соответствующего столбца будет **1**.

Это объясняется тем, что результат сложения делится на модуль (в данном случае =5.) и остаток этого деления заносится в таблицу. (в данном случае остаток =1)

Рассмотрим функцию Эйлера:

Функция Эйлера $\Psi(M)$ - равна количеству чисел, меньших M и не имеющих с ним общих множителей. Следовательно, функция Эйлера от простого числа будет равна самому этому числу минус 1, т.е. $\Psi(P) = P - 1$

$j(q1; q2) = j(q1) \cdot j(q2)$ – фундаментальное значение в теории чисел.

Теорема Ферма-Эйлера.

В кольце целых чисел всегда существует такое основание a , при котором:

Если a, M не имеют общих множителей.

$(a, M) = 1 \implies$ наибольший общий делитель $= 1$.

Тогда имеет место соотношение :

$$a^{\Psi(M)} = 1 \pmod{M}$$

a — основание, M — модуль, N — количество отсчетов.

Следствие

2. Если число M — простое, то $\Psi(M) = M - 1$

Известно N , надо найти M .

$a^N = a^{\Psi(M)} = 1$ - не всякое число M может являться решением данного уравнения.

$a^n = 1$, если n -делитель $\Psi(M)$.

Теорема Ферма-Эйлера –2

В кольце целых чисел по модулю M всегда найдутся числа a, M такие,

что

$$a^N = 1 \pmod{M}.$$

$$a^{n \pm N} \pm 1 \pmod{M}.$$

N – это делитель $\Psi(M)$.

Если число $M = 2, 4, P^a, 2 \cdot P^a$ - то любой делитель $\Psi(M) = N$.

возьмём для частного случая

P – простое число, a — степень

Если $n = 2^q$, то число является простым

$2^n + 1 = 2^r + 1$ – числа Ферма.

где $r = 2^q$

$M = 2^{2^q} + 1$ - числа Ферма.

Числа являются простыми не для любого q .

На сегодняшний день известны значения $q=0, 1, 2, 3, 4$.

Q	0	1	2	3	4
N	1	2	4	8	16
N	2	4	16	256	65536
M	3	5	17	257	65537
0	2	2	3	3	3

a – удовлетворяющее данным условиям.

Пересчитаем основание **a**:

$$N' = \frac{N}{2^a};$$

$$(a')^N = 1 \iff (a')^{N/2^a} = 1 \iff a' = a^z, \text{ где } z=2^a.$$

Если изображение имеет размер 1024 * 1024 пиксела, то
M = 65537 ; a=3 ; N = 65536.

Достоинства и недостатки методов:

Фурье.

Недостатки: используем комплексные числа, числа все иррациональные, нет возможности использовать для малой разрядной сетки.

Достоинства: работа в традиционной арифметике, коэффициенты Фурье имеют простой физический смысл.

Теоретико-числовые преобразования:

Недостатки: арифметика по модулю M, коэффициенты носят абстрактный характер.

Достоинства: вся работа с целыми числами, маленькая разрядная сетка (17 разрядов).

Существуют **быстрые алгоритмы взятия линейного преобразования**:

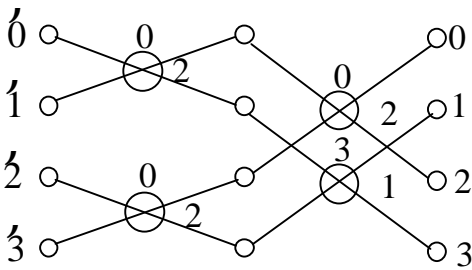
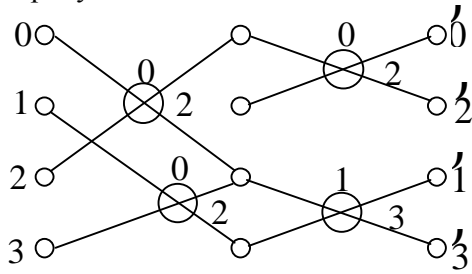
Выигрыш может быть получен при использовании метода быстрых теоретико-числовых преобразований. Этот метод наиболее эффективен, если число

отсчетов $N = 2^n$

$$x_l = \sum_{i=0}^N x_i a^{il}$$

Схема одномерного преобразования:

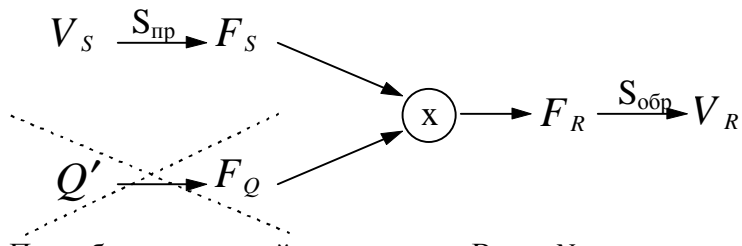
Нарисуем для $n=4$:



Количество ступеней для числа $n = \log_2 N$

Число выходов на каждой ступени – $2N$.

Вернемся к схеме преобразования:



Пренебрегаем данной сложностью. Всего N строк, на каждой строке $N \log_2 N$,
всего $N^2 \log_2 N$

Сложность прямого преобразования $2N^2 \log_2 N$

Сложность быстрого преобразования:

$S_{БП} = (4N^2 \log_2 N)k$, где k — коэффициент сложности

Рассмотрим случай, когда $N^2 L^2 > kYN^2 \log_2 N$.

Т. е. $L > 2\sqrt{k \log_2 N}$

Например, $N=512$, $k=3$

